Note e registro delle lezioni del corso di Teoria dei Campi 1

2016-2017

Note estese in inglese, relative al corso di QFT A.A. 2017-2018, sono disponibili at

https://www2.pd.infn.it/~matone/QFTCourseNotes.pdf

Registro delle lezioni del corso di Teoria dei Campi 1

2016 - 2017

1. Lunedì 27 Febbraio, 14.30 - 16.15.

Scopo del corso. Testi di riferimento. Modalità d'esame. Descrizione del programma. Principali differenze tra la Meccanica Quantistica e le Teorie Quantistiche di Campo. Cenni sulla formulazione perturbativa, formalismo operatoriale, formalismo path integral. Commenti su $\lambda \phi^4$ ed Elettrodinamica Quantistica (QED). Indicazioni della banalità di $\lambda \phi^4$ in D = 4 e sua non esistenza per D > 4. Non sommabilità alla Borel della QED. Teorema di Wigner e simmetrie esatte. Algebra delle osservabili e loro *-automorfismi. Teorema di von Neumann e equivalenza unitaria delle teorie con finiti gradi di libertà. Rottura spontanea di simmetria possibile solamente in teorie con infiniti gradi di libertà. Formulazione sul reticolo. Teorema di Elitzur. Formulazione assiomatica. Enunciazione degli assiomi di Wightman, funzioni di Wightman, teorema di ricostruzione di Wightman. Formulazione nell'euclideo: funzioni di Schwinger e teorema di ricostruzione di Osterwalder e Schrader.

L'eccellente testo di F. Strocchi, "Elements of QM of infinite systems". SISSA. Worlds Scientific, 1985, fornisce una trattazione di alcuni aspetti non-perturbativi. La parte sulla rottura spontanea di simmetria illustrata a lezione è riportata alle pagg. 115-120. Si consigliano anche http://arxiv.org/pdf/1201.5459.pdf e http://arxiv.org/ pdf/1502.06540.pdf. Altri due eccellenti testi di teoria dei campi quantistici sono F. Strocchi, "An introduction to non-perturbative foundations of quantum field theory", Oxford, 2013. Haag, "Local quantum physics, fields, particles, algebras", Springer-Verlag, 1996. Note: A brief introduction to different QFT approaches.

2. Giovedì 2 Marzo, 14.30 - 16.15. Covarianza dell'equazione di Dirac. Trasformazione degli spinori sotto il gruppo di Poincaré, $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$. $S(\Lambda)$ nel caso di trasformazioni di parità. Algebra di Clifford. Bilineari spinoriali. $S(\Lambda)$ nel caso di coniugazione di carica. Simmetrie discrete nel formalismo operatoriale fermionico. Parità.

Itzykson-Zuber. Sezioni 2-1-2, 2-1-3, 2-4-2, 3-4-1. Altri ottimi riferimenti sono i capitoli 2 e 3 del testo di Peskin-Schroeder, "Quantum Field Theory", e i capitoli 11, 12, 13 del Bjorken-Drell, "Relativistic Quantum Fields". Note: Unitary representation of the Poincaré Group - Wigner classification. Behaviour of local fields under the Poincaré group. Relativistic covariance. Finite-dimensional irreducible representations of the Lorentz group.

3. Lunedì 6 Marzo, 14.30 - 16.15.

Coniugazione di carica e inversione temporale. Trasformazioni dei bilineari di Dirac sotto $P, C \in T$. Teorema PCT.

Itzykson-Zuber. Sezioni 3-4-2, 3-4-3, 3-4-4. Altri ottimi riferimenti sono i capitoli 2 e 3 del testo di Peskin-Schroeder, "Quantum Field Theory", e i capitoli 11, 12, 13 del Bjorken-Drell, "Relativistic Quantum Fields". Note: Commento sull'inversione temporale.

4. Giovedì 9 Marzo, 14.30 - 16.15.

Stati *in* e *out*. Formula di riduzione di Lehmann, Symanzik e Zimmerman nel caso del campo scalare. Introduzione del path integral: trasformazioni canoniche ed equazione di Hamilton-Jacobi. Funzione principale di Hamilton e funzione caratteristica di Hamilton.

Sezione 5 di M. Srednicki, "Quantum Field Theory", Cambridge. Per approfondimenti si vedano le note: Rappresentazione di Källen-Lehmann. N.B.: Srednicki utilizza la metrica g' = -g, diag(g') = (-1, 1, 1, 1). I prodotti scalari eseguiti con le due metriche differiscono per il segno.

5. Lunedì 13 Marzo, 14.30 - 16.15.

Articolo di Dirac dove formula il path integral. Dirac:

$$\langle q'_{t+\delta t}|q_t\rangle = A \exp\left[\frac{i}{\hbar}\delta t L(q_t, q'_{t+\delta t})\right]$$

Calcolo di $\langle q'_{t+\delta t} | q_t \rangle$ nel caso di hamiltoniana $H = p^2/2m + V(q)$.

Ramond, sezioni 2.1 e 2.2. Note: Sull'articolo di Dirac dove è formulato per la prima volta il path integral. P. A. M. Dirac, "The lagrangian in quantum mechanics", Phys. Z. Sowjetunion **3** (1933) 64. Disponibile in, Selected papers on quantum electrodynamics, J. Schwinger Ed., Dover, 1958. Si veda anche, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/ 0004090v1.pdf. Il testo canonico è: Feynman-Hibbs, "Quantum mechanics and path integrals", McGraw Hill, 1965, e l'edizione Dover del 2010 commentata da Styer.

6. Giovedì 16 Marzo, 14.30 - 16.15.

 $A(\delta t)$. Espressione dell'integrale sui cammini. $H = p^2 v(q)/2$: necessità della formulazione hamiltoniana. Integrale sui cammini nel caso

dell'oscillatore armonico forzato. Ampiezza vuoto-vuoto. Rotazione di Wick. Interpretazione dell'integrale sui cammini in presenza di sorgente esterna in termini di ampiezza vuoto-vuoto. Lagrangiane quadratiche.

Ramond, sezioni 2.2. e 2.3.

7. Lunedì 20 Marzo, 14.30 - 16.15.

Lagrangiane quadratiche. Invarianza sotto traslazioni temporali dell'integrale sui cammini. Propagatore della particella libera. Propagatore come funzione d'onda spazialmente localizzata ad un dato istante. Integrale sui cammini nel caso di accoppiamento con campo magnetico classico. Effetto Bohm-Aharonov. Derivata funzionale. Proprietà generali dell'integrale sui cammini nel caso delle teorie scalari.

Ramond, sezione 2.3. Felsager, "Geometry, Particles and Fields", Springer, 1998, pagg. 45-49, pagg. 70-71. MacKenzie, sezione 4.1. Ramond, sezioni 3.2. Note: Derivata funzionale.

8. Giovedì 23 Marzo, 14.30 - 16.15.

Metodi di convergenza: prescrizione $i\epsilon$ e formulazione nell'euclideo. Caso della teoria libera. Propagatore di Feynman. Funzioni di Green a N-punti. Funzioni di Green in rappresentazione degli impulsi, loro rappresentazione grafica e interpretazione fisica. Formalismo di Schwinger. Trasformata di Legendre di $Z_0[J]$ come azione effettiva (caso libero). Corrispondenza tra azione classica e azione effettiva nel caso libero. Trasformata di Legendre di Z[J] come azione effettiva $\Gamma[\phi_{cl}]$. Equazione del moto per $\phi_{cl} = \delta_J Z[J]$ (equazione di Schwinger-Dyson). Espressione di $\Gamma[\phi_{cl}]$ in termini del potenziale effettivo, del termine cinetico e delle derivate di ordine superiore di ϕ_{cl} . Il caso $V = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$.

Ramond, sezioni 3.1, 3.2 e 3.3. Note: Richiamo sul formalismo operatoriale. $\phi_{cl}(x)$ e l'equazione di Schwinger-Dyson.

9. Lunedì 27 Marzo, 14.30 - 16.15.

Derivazioni alternative dell'equazione di Schwinger-Dyson. Dimostrazione della corrispondenza tra le funzioni a N punti espresse nel formalismo operatoriale e le derivate ennesime del funzionale generatore. Funzionale generatore delle funzioni a N punti connesse (linked-cluster theorem). Funzioni di Green connesse nel caso $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \neq 0$.

Note: $\phi_{cl}(x)$ e l'equazione di Schwinger-Dyson. Funzione a N-punti nel formalismo dell'integrale sui cammini. Z[J] come generatore delle funzioni di Green connesse. Commento sulle funzioni di Green connesse. Tali note sono basate sui testi: Peskin-Schroeder, "An introduction to Quantum Field Theory", ABP 1995. pagg. 282-284 della sezione 9.2, e Kerson Huang, "Quantum Field Theory. From operators to path integrals", seconda edizione, 2010. pagg. 188-189, sezione 10.4.

10. Giovedì 30 Marzo, 14.30 - 16.15.

Rotazione di Wick nel caso campistico. Approssimazione del punto a sella nel caso campisitico. Integrali gaussiani in più dimensioni e determinanti di operatori. Inverso del propagatore di Feynman e la derivata seconda dell'azione calcolata nella soluzione classica. Calcolo di $S_E[\phi_0, J]$ in termini dello sviluppo del campo classico ϕ_0 espresso in serie di potenze di λ , $\phi_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \phi^{[k]}$. Il caso $V = \frac{\lambda}{4!} \phi^4$. ϕ_0 in funzione di J, $S_E[\phi_0, J] = S_E[\phi_0[J], J]$.

Ramond, sezione 3.4. Appendice A. Note: Rotazione di Wick. Per le proprietà dell'inverso del propagatore di Feynman si veda la parte iniziale delle note: Teorema di Jona-Lasinio: $\Gamma[\phi]$ come funzionale generatore delle $\Gamma^{(N)}$.

11. Lunedì 3 Aprile, 14.30 - 16.15.

Funzioni di Green ad N punti connesse nell'euclideo nello spazio delle configurazioni, loro trasformata di Fourier $\tilde{G}_{cE}^{(N)}$ e calcolo, all'ordine \hbar^0 , di $\tilde{G}_{cE}^{(2)}$, $\tilde{G}_{cE}^{(4)}$ e $\tilde{G}_{cE}^{(6)}$. Regole di Feymann e diagrammi relativi. Relazione tra numero di linee esterne, numero di vertici e numero di linee interne in un dato diagramma di Feymann. Assenza di loops nello sviluppo diagrammatico all'ordine \hbar^0 . $\Gamma_E[\phi_{cl}] = S_E[\phi_0]$ all'ordine \hbar^0 . Vertici propri. $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}(p)\tilde{G}_{cE}^{(2)}(p) = 1$.

Ramond, sezione 3.4. Note: $\tilde{\Gamma}_{E}^{(2)}(p)\tilde{G}_{cE}^{(2)}(p) = 1.$

12. Giovedì 6 Aprile, 14.30 - 16.15. Calcolo dei determinanti tramite la funzione ζ e l'equazione del calore. $\Gamma[\varphi_{cl}]$ all'ordine \hbar . Proprietà di scaling della costante d'accoppiamento. Proprietà di scaling dei determinanti e anomalia sotto dilatazioni. Calcolo perturbativo di Z[J].

Ramond, sezioni 3.4, 3.5 e 4.1.

13. Lunedì 10 Aprile, 14.30 - 16.15. Commenti su $\Gamma[\varphi]$ all'ordine \hbar . Teorema di Wick. Regole di Feynman per $\lambda \phi^4$. Esempi: tadpole, setting sun. Singolarità rimovibili con il normal-ordering.

Ramond, sezione 4.1. Note: Commenti su $\Gamma[\varphi]$ all'ordine \hbar .

14. Giovedì 13 Aprile, 14.30 - 16.15. Espansione in loops come espansione in potenze di \hbar . Ruolo delle funzioni di Green troncate nella formula

di riduzione di Lehmann, Symanzik e Zimmerman. Funzioni proprie di vertice $\Gamma^{(N)}$, loro rilevanza nella rinormalizzazione. Azione effettiva come funzionale generatore delle funzioni proprie di vertice (senza dimostrazione). Divergenze ultraviolette e infrarosse. Grado di divergenza superficiale. Teorie non rinormalizzabili, rinormalizzabili e superrinormalizzabili. Aspetti non perturbativi. Enunciato del teorema di Weinberg. Metodi di regolarizzazione. Regolarizzazione dimensionale.

Ramond, sezioni 4.2, 4.3, Appendice B. La discussione nel testo di Ramond pagg. 111-112 è anche riportata con maggior cura e chiarezza nelle note di Casalbuoni: pagg. 92-97 di http://theory.fi. infn. it/casalbuoni/dott1.pdf. Si vedano anche pagg. 139-142 http://theory.fi.infn.it/casalbuoni/lezioni99.pdf. Note: Espansione in loops come espansione in ħ. Funzioni proprie di vertice. Per eventuali approfondimenti (non in programma) si vedano le note: Teorema di Jona-Lasinio: $\Gamma[\phi]$ come funzionale generatore delle $\Gamma^{(N)}$, e: Derivazione della (4.3.13) nel testo di Ramond dalla (4.3.11). Si consiglia anche la sezione 11.5 del testo di Kleinert, "Particles and Quantum Fields", World Scientific, 2016.

15. Giovedì 20 Aprile, 14.30 - 16.15. Dimostrazione della formula di parametrizzazione di Feynman. Azione nell'euclideo in 2ω dimensioni, λ_{new} adimensionale e parametro μ di 't Hooft. Calcolo dei diagrammi tadpole e fish.

Ramond, sezione 4.4. Per la parametrizzazione di Feynman si veda http://kodu.ut.ee/~kkannike/english/science/physics/notes/ feynman_param.pdf.

16. Giovedì 4 Maggio, 14.30 - 16.15. Calcolo del diagrammi, fish e double scoop. Cenni sul calcolo del diagramma setting sun, analisi delle divergenze, residuo dipendente dal momento. Rinormalizzazione. Termine di massa considerato come vertice a due punti, propagatore di Feynman con massa come sviluppo digrammatico di quello senza massa con interazione data dal termine di massa. Controtermini per $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$ e $\tilde{\Gamma}^{(4)}$. Struttura ricorsiva della procedura di rinormalizzazione. Cenni sulle overlapping divergences. Densità di lagrangiana rinormalizzata. Relazione tra le funzioni proprie di vertice rinormalizzate e nude.

Ramond, sezioni 4.4 e 4.5. Note: Sulle regole di Feynman. $\tilde{\Gamma}^{(2)}$ a one-loop con il contributo del controtermine. Relazione tra le funzioni proprie di vertice rinormalizzate e nude. Si noti che, come ovvio, anche il controtermine cinetico porta ad una nuova regola di Feynman che

nel testo di Ramond non è rappresentata graficamente, in quanto non è comunque utilizzata nel seguito del testo. Un utile riferimento per ulteriori approfondimenti è la sezione 11 del testo di Kleinert, "Particles and Quantum Fields", World Scientific, 2016.

17. Lunedì 8 Maggio, 14.30 - 16.15. Equazione del gruppo di rinormalizzazione. Equazione di scala di $\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(N)}$. Espressione dei parametri nudi in termini di λ , m/μ ed ϵ . Prescrizioni di rinormalizzazione. Prescrizione di 't Hooft e Weinberg. La funzione β . Polo di Landau. Punti fissi ultravioletti e infrarossi di β . Libertà asintotica e confinamento. Scaling di $\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(N)}$ e dimensione anomala.

Ramond, sezioni 4.5 e 4.6. I passaggi espliciti relativi alle equazioni 4.6.10 - 4.6.15 del testo di Ramond sono riportati nelle equazioni 31.11 - 31.23 di http://theory.fi.infn.it/casalbuoni/dott1.pdf. Note: Scaling di $\tilde{\Gamma}_{ren}^{(N)}$ e dimensione anomala.

18. Giovedì 11 Maggio, 14.30 - 16.15. Calcolo di γ_m e γ_d . Le funzioni di vertice nel limite di grandi momenti nel caso di esistenza di punto UV stabile. Dipendenza dalla prescrizione dei coefficienti del gruppo di rinormalizzazione. Proprietà invarianti della funzione β sotto cambio di prescrizione di rinormalizzazione nei casi in cui la massa è trascurabile. Proprietà non gruppali delle trasformazioni tra prescrizioni di rinormalizzazione. Relazione tra funzioni di Green nell'euclideo e nel minkowskiano.

Ramond, sezione 4.6, 4.7 e 4.8. Per le proprietà non gruppali delle trasformazioni tra prescrizioni di rinormalizzazione si veda Pokorski, "Gauge Field Theories", 2nd Edition, Cambridge, 2000, pagg. 209-210. La dipendenza dei coefficienti del gruppo di rinormalizzazione dalla prescrizione è illustrata anche nelle note di Casalbuoni pagg. 131-132 http://theory.fi.infn.it/casalbuoni/dott1.pdf.

 Lunedì 15 Maggio, 14.30 - 16.15. Algebra di Grassmann. Derivata e integrale per variabili anticommutanti. Il path integral fermionico. Propagatore fermionico.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", 2nd Edition. 1996, sezione 6.7.

20. Giovedì 18 Maggio, 14.30 - 16.15. Segno del loop fermionico opposto al caso bosonico. Path integral nel caso del campo di gauge abeliano. Propagatore. Gauge fixing. Gauge di Feynman e di Landau. Campi di gauge non abeliani.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", sezioni 7.1 e 7.2.

 Lunedì 22 Maggio, 14.30 - 16.15. Quantizzazione dei campi di Yang-Mills. Metodo di Faddeev e Popov. Regole di Feynman nella gauge di Lorentz. Identità di Ward-Takahashi.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", sezioni 7.2 e 7.4.

22. Giovedì 25 Maggio, 14.30 - 16.15. Identità di Ward-Takahashi. Trasformazione di Becchi-Rouet-Stora. Teorema di Furry. Divergenza superficiale per i grafici di Feynman in QED. Algebra di Dirac in D dimensioni, il problema della γ_5 . Calcolo diagrammi a one-loop: self-energy dell'elettrone.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", sezioni 7.4, 7.5 fino Eq.(7.137), 9.5. Il teorema di Furry è ben formulato nel problema 58.2 del testo di Srednicki, e dimostrato nel suo testo di soluzioni "Quantum Field Theory: Problem Solutions", disponibile at https://drive.google. com/file/d/0B0xb4cr0vCgTM2x6QkhKREg0WW8/edit. L'algebra di Dirac in dimensioni qualsiasi è discussa nel testo di Collins, "Renormalization". Un ottimo articolo è quello di S. Weinzierl, Equivariant dimensional regularization, hep-ph/9903380, disponibile at https:// arxiv.org/pdf/hep-ph/9903380.pdf.

23. Lunedì 29 Maggio, 14.30 - 16.15. Calcolo diagrammi a one-loop: polarizzazione del vuoto, funzione di vertice. Controtermini.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", sezioni 9.5 e 9.6.

 Giovedì 1 Giugno, 14.30 - 16.15. Rinormalizzazione a one-loop della QED. Lamb Shift. Momento magnetico anomalo.

L.H. Ryder, "Quantum Field Theory", 9.6. Itzykson-Zuber, sezione 2-2-3.

Note su alcune parti del corso di Teoria dei Campi 1

A brief introduction to different QFT approaches

Matteo Sighinolfi

The aim of these notes is to provide a short overwiev on the various approaches to quantum field theory QFT, whose main task is to compute physical quantities such as the S-matrix and therefore the cross section of the theory. We will start with the axiomatic approach, based on the Wightman axioms, which is mathematically well-defined and is therefore used for rigorous proofs. Another approach is the perturbative one, which is the most used for studying quantum field theories. This can be formulated in terms of the operator approach or in the framework of the path integral formalism. A nonperturbative approach to QFT concerns the formulation on a lattice, where space-time is discretized. We will also shortly review the formalism based on the Schrödinger representation of quantum fields. The last section concerns a short introduction to the phenomenon of spontaneous symmetry breaking. Here is the list of abbreviations used in these notes.

- CCR= canonical commutation relations
- **GF**= Green's functions
- QCD=quantum chromodynamics
- **QED**= quantum electrodynamics
- **QFT**= quantum field theory
- QFTL= quantum field theory on a lattice
- QM= quantum mechanics
- SSB= spontaneous symmetry breaking

What QFT is: differences with QM and consequences

In the past courses the student has been introduced to QM and its formalism. In QM, as in classical physics, it is possible to discriminate between a theory with a finite number of degrees of freedom and a theory with an *infinite* number of degrees of freedom. We will denote the first as QM_{fin} and the latter as QM_{∞} . As shown in the lectures of "Theoretical Physics A", in QM one says that the map

$$T: |\phi\rangle \to |\phi'\rangle ,$$

where $|\phi\rangle$ and $|\phi'\rangle$ belong to the Hilbert space of states, is an exact (or unbroken) symmetry if preserves the transition probabilities

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 = |\langle \phi' | \psi' \rangle|^2$$

A theorem by Wigner states that such a transformation must be represented by the transformation

$$|\phi'\rangle = U|\phi\rangle$$
,

where U is a unitary or antiunitary operator. This is true both for QM_{fin} and QM_{∞} , but there is a great difference between the two cases.

QFT is a QM_{∞} theory, and it is possible to show that only for this type of theory there are *inequivalent representations* of CCR not connected by unitary (or antiunitary) transformations. Later on we will see that this is related to SSB.

The main point is that QFT has infinite degrees of freedom, so it must be treated differently than QM_{fin} . We will consider some of the possible approaches illustrating their successes and problems.

Axiomatic approach

This approach was developed by Wightman in the 50's, with the will of quantize fields following von Neumann's idea of quantum theory (so the Dirac's formalism, involving bra and ket, is not followed).

Let us first consider a classical relativistic field theory. Here one considers a field $\phi(\vec{x}, t)$ whose dynamics is consistent with special relativity. For a free field with mass $m \ge 0$ this means that $\phi(\vec{x}, t)$ satisfies the free wave equation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\vec{x}, t) - \nabla^2 \phi(\vec{x}, t) + m^2 \phi(\vec{x}, t) = 0 .$$
 (1)

It is now possible to choose as units of time and space $x^0 = ct$, x^j , j = 1, 2, 3. In this way, the Minkowski metric is the familiar mostly negative

$$g \equiv g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$$

adopting the standard convention for covariant and contravariant variables the free wave equation is now written in the Lorentz covariant form

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\phi + m^{2}\phi = 0 . (2)$$

This equation can be obtained from the free action

$$S_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi + m^2 \phi \right) .$$
(3)

To have an interacting theory one adds a term to S_0 which is usually a polynomial in ϕ with grade higher than two, for example

$$S_I = \int d^4x \frac{\lambda}{4} \phi^4 \; ,$$

implying the classical equation of motion

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\phi + m^{2}\phi - \lambda\phi^{3} = 0.$$
⁽⁴⁾

Until now there is nothing new or tricky in our physics, but by now things starts getting more difficult. If $\phi(\vec{x}, t)$ is a real field, then Eq.(4) has smooth solutions for any smooth bounded initial conditions at some initial time t_0 . The field is determined at every position and time knowing its value and of its time derivative at $t = t_0$. At any time, there is a Poisson bracket between the field and its time derivative $\dot{\phi}$

$$\left\{\phi(\vec{x},t),\dot{\phi}(\vec{y},t)\right\} = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

If one tries to quantize the field ϕ , it is clear that it can't be a function of \vec{x} because of the above Poisson bracket with $\dot{\phi}$. The only possibility for ϕ is to be a distribution in the sense of Schwartz. Looking back at Eq.(4) we see that the term ϕ^3 is problematic because non-linear distributions are undefined. Actually, quantizing the theory one unavoidably gets the divergences in the calculations, like the infinites arising in the Dyson-Feynman theory.

A different approach was successfully implemented by Wightman in 1956 for free fields. Wightman found that to give sense to the space-time derivatives of the free field, and also to field polynomials and their derivatives, it is enough to smear the field with an infinitely smooth function of Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)^1$

¹We remember that the space $S := S(\mathbb{R}^4)$ consists of infinitely differentiable real functions of real variables that goes to zero an infinity faster than any power of the Euclidean distance. For an introduction to distributions see, for example, http://www.pd.infn.it/ ~matone/DistribuzioniEFourier.pdf.

in space-time. In particular, Wightman showed that the smeared field

$$\phi_l^{(k)}(f) = \int d^4x \phi_l^{(k)}(x) f(x) , \qquad (5)$$

with f(x) a test function and $\left\{\phi_l^{(k)}(f)\right\}$ linear operators in a Hilbert space \mathcal{H} , is a well-defined operator on the Fock space.

Wightman's axioms

It is now necessary to introduce a set of axioms to work with our QFT, where the fields are the smeared ones in (5).

W1 (Relative invariance of the space of states). It exists a Hilbert space \mathcal{H} that carries a continuous unitary representation $\mathcal{U}(\Lambda, \mathbf{a})$ of the Poincaré spinorial group (universal covering group of the Poincaré proper group).

W2 (Spectral properties). The spectrum of p^{μ} is concentrated exclusively in the superior closed cone

$$\bar{V}^+ := \{ p \in \mathbb{M} \mid p^2 \ge 0, p^0 \ge 0 \} \quad m = 0 \text{ included }.$$

W3 (Existence and uniqueness of the vacuum). $\exists ! a \ vacuum \ states |0\rangle$ (up to a phase $e^{i\varphi}$) for \mathcal{H} that is invariant under $\mathcal{U}(\Lambda, \mathbf{a})$.

With these three axioms Wightman noticed that for the quantized filed ϕ , $\phi(f)$ is unbounded. For an unbounded operator it is necessary to define a domain \mathcal{D}

W4 (Fields' domain of definition). The components $\phi_l^{(k)}$ of the field $\phi^{(k)}$ are operators with distributional values on the Schwartz's space $\mathcal{S}(\mathbb{M})$, with domains of definition \mathcal{D} common for all the operators and dense in \mathcal{H} . The vacuum lies in \mathcal{D} and $\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ under $\phi_l^{(k)}$ and $\mathcal{U}(\Lambda, \mathbf{a})$.

W5 (Poincaré covariance). The fields transform under $\mathcal{U}(\Lambda, \mathbf{a})$ according to the law

$$\mathcal{U}(\Lambda, \mathbf{a})\phi_l^{(k)}(x)\mathcal{U}^{-1}(\Lambda, \mathbf{a}) = \sum_{l,m} V_{l,m}^{(k)}(\Lambda^{-1})\phi_m^{(k)}(\Lambda x + a) ,$$

with $V^{(k)}_{l,m}(\Lambda^{-1})$ finite representation of $SL(2,\mathbb{C}).^2$

 ${}^{2}V_{l,m}^{(k)}(\mathbb{I}_{4}) = \pm 1, \pm 1$ if $\phi^{(k)}$ is a tensorial field while -1 if $\phi^{(k)}$ is a spinorial field.

W6 (Locality and microcausality). Two fields $\phi_l^{(k)}(x)$ and $\phi_m^{(k')}(y)$ commute or anticommute when there is a space-like separation between two points x, y of \mathbb{M} , *i.e.*

$$\left[\phi_l^{(k)}(x), \phi_m^{(k')}(y)\right]_{\mp} = 0 \quad \text{for} \quad (x-y)^2 < 0$$

W7 (Cyclicity of vacuum). The set of finite linear combinations of vector of the form

$$\phi_{l_1}^{(k_1)}(f_1)\dots\phi_{l_n}^{(k_n)}(f_n)|0\rangle$$
 $n = 1, 2, \dots$

is dense in \mathcal{H} . A vector with this property is called cyclic, so the vacuum is cyclic.

It should be stressed that the axiom **W6** is hard to satisfy. In particular, all known examples are derived from free fields and, if one proceeds in the usual way by looking at the vacuum representation, then get a trivial scattering-matrix.

Wightman's distributions

Finding the fields ϕ that satisfy Wightman's axioms is very difficult, for this reason it is useful to introduce the Wightman *distributions* \mathcal{W}_n . Through these objects, the QFT problem is reduced to finding a set of distributions \mathcal{W}_n satisfying certain properties.

First, we must define what is a Wightman distribution. Consider the vacuum Ψ_0 of a Wightman field ϕ and test functions f_1, \ldots, f_n and the multifunctional

$$\langle \Psi_0 | \phi(f_1) \phi(f_2) \dots \phi(f_n) | \Psi_0 \rangle$$
, (6)

which is a map from the *n* test functions into complex numbers. In addition, this mapping is continuous because of the assumption that the field is a distribution, and this is still true for each f_i keeping all the others fixed. Using Schwartz's nuclear theorem it is possible to prove that there is a unique distribution in 4n variables, denoted by $\mathcal{W}_n(f)$ and called Wightman's distribution, defined for all test functions $f(x_1, \ldots, x_n)$, that coincides with (6) when $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$. Therefore,

$$\mathcal{W}_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \langle \Psi_0 | \phi(f_1) \dots \phi(f_n) | \Psi_0 \rangle$$

If the field is assumed to be a tempered distribution, i.e. is a continuous linear map $S \to \mathbb{C}$, then also \mathcal{W}_n is tempered.

Starting from the axioms W1-6 it is possible to find the corresponding properties for \mathcal{W}_n . These are quite easy to find and are formalized in a set of theorems not showed here explicitly. A key consequence is that two fields are physically the same if they have the same Wightman distributions, because \mathcal{W}_n determine the field up to unitary transformations. This means that, giving a set of \mathcal{W}_n obeying some properties, than there exists a separable Hilbert space³ on which acts a Wightman field ϕ that obeys the axioms **W1-6**. In conclusion, the problem is no longer to directly find the field ϕ but the \mathcal{W}_n obeying some specific properties.

Reconstruction theorem

Suppose that we were able to find the \mathcal{W}_n introduced before: how are they linked to QFT and to the quantities of interest? Answering this question is the aim of the reconstruction theorem. An approach is to reconstruct the fields directly from \mathcal{W}_n , another one is to perform an analytic continuation to find the so-called Schwinger's function $\mathcal{S}(x_1, \ldots, x_n)$, defined in the Euclidean space.

Reconstructing fields directly from a given set of \mathcal{W}_n is like reconstructing the representation of a \mathcal{C}^* -algebra from a state, with the remarkable difference that Wightman's operators are generally unbounded. In addition, Borchers proved that Wightman fields $\phi(f)$ generate a *-algebra over the complex numbers called \mathcal{A} . An element $A \in \mathcal{A}$ and Ψ in D, domain of $\phi(f)$, defines the expectation functional on \mathcal{A}

$$A \to \langle \Psi | A | \Psi \rangle$$
.

This map is linear and positive and has the properties of the state of the algebra, in particular the vacuum expectation values \mathcal{W}_n define a state on \mathcal{A} . It is now possible to define by these elements the Hilbert space \mathcal{H} , the domain D and the filed operator $\phi(f)$, i.e. all the elements necessary to our QFT.

The Wightman distributions can be continued analytically to the Euclidean space

$$\{-ix^0, \vec{x}\}, \qquad x^0 \in \mathbb{R}, \ \vec{x} \in \mathbb{R}^3.$$

The Schwinger's functions are

$$\mathcal{S}_n(\ldots,\vec{x}_k,x_k^0,\ldots) := \mathcal{W}_n(\ldots,\vec{x}_k,-ix_k^0,\ldots) ,$$

³A Hilbert space is separable if contains a countable dense subset, i.e. \exists a sequences $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ of \mathcal{H} such that every nonempty open subset of \mathcal{H} contains at least one element of the sequence.

with

$$x_{k+1}^0 - x_k^0 > 0 \; .$$

The properties of Schwinger's function have been studied axiomatically by Osterwalder and Schrader. The axioms in the Osterwalder and Schrader formulation are

E1 Schwinger's functions are invariant under Euclidean transformation

$$\mathcal{S}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{S}(\Lambda x_1 + a, \dots, \Lambda x_n + a)$$

with $\Lambda \in SO(4)$.

- E2 Schwinger's functions satisfy the so called reflection positivity property, related to the time reversal in Minkowski space (see Glimm and Jaffe book).
- E3 Schwinger's functions are symmetric in their arguments.
- **E4** Schwinger's functions satisfy the cluster property. This is related to an asymptotic factorization of $S_n(\ldots, \vec{x}_k, x_k^0, \ldots)$ (see Glimm and Jaffe book).

By the Schwinger's functions it is possible to reconstruct the Wightman's functions \mathcal{W}_n and then the corresponding QFT. The advantage of working with Schwinger's functions is that they are defined in Euclidean space, so that they obey to simpler properties and are easier to manipulate than the Wightman functions or field operators.

Applications, successes and fails

The axiomatic approach is successful in describing free fields and is the framework in which most of the properties of the QFT are rigorously proven. In particular, this is done for the PCT theorem, proving invariance under parity transformation, charge conjugation and time reversal of a Wightman theory, and the spin-statistics theorem, proving the connection between the spin of the particle and the statistics it satisfies.

On the other hand, the axiomatic approach has the problem that only a small number of concrete derivations are known. In addition, Wightman theory deals with unbounded operators. This can be resolved using the algebraic approach that treats only limited operators, but this causes a loss of generality in the theory.

Perturbative approach

While free theories are surely easier to study, the interacting ones are the most interesting and necessary to describe Nature. Unfortunately, no exactly solvable interacting theory is known in more than two space-time dimension⁴. An alternative approach is to use a perturbative approach. This approach was derived independently by Tomonaga, Schwinger and Feynman by removing the special role of time in QM, and then applying this viewpoint to recast each term of perturbation expansion as a space-time process. We will now draw a sketch of how this is possible through the method of functional integration and the result one may obtain.

Path integral formulation

Let us consider the probability amplitude of finding a particle at (x, t) knowing that it was at (x_0, t_0)

$$\langle \vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0 \rangle$$
.

This is given by the sum of the amplitudes of all possible paths, each path weighted by its quantum mechanical amplitude. This sum over paths is the *path integral* and can be expressed in the form

$$\langle \vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(i \int_{t_0}^t dt \mathcal{L}[\dot{x}, x, t]\right) = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left(i S[x(t)]\right) ,$$
(7)

where \mathcal{L} is the classical Lagrangian, S is the classical action and $\mathcal{D}x(t)$ denotes the functional integration over all possible paths. By means of the amplitudes $\langle \vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0 \rangle$ it is possible to calculate all the quantities of physical interest (observables). However, also in the case of QM path integral one may get analytic solutions for few systems only, e.g. the free particle, harmonic and forced oscillator. In the general case the only way to compute $\langle \vec{x}, t | \vec{x}_0, t_0 \rangle$ is to use the perturbative approach. We have seen that the path integral is useful in QM, but how can we derive its QFT version?

In the path integral representation of QM one integrates over the phase space (\vec{x}_i, \vec{p}_i) . In a second quantized system, the field $\phi(\vec{x})$ is an operator, so we should expect that in QFT the path integral is constructed integrating in a phase space of functions $(\phi(\vec{x}), \pi(\vec{x})), \pi(\vec{x})$ being the appropriate momentum. Defining $\langle \phi, t | \phi_0, t_0 \rangle$ as the probability amplitude for a field in the configuration $\phi_0(\vec{x})$ at t_0 to evolve to $\phi(\vec{x})$ at t, after some mathematical preliminaries

⁴For example, the Ising model is exactly solved in two dimensions but not in three.

we find⁵

$$\langle \phi, t | \phi_0, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i \int_{t_0}^t dt \int dx^{d-1} \mathcal{L}[\dot{\phi}, \phi, t]\right) = \int \mathcal{D}\phi \exp\left(i S[\phi(t)]\right) .$$
(8)

 \mathcal{L} is the classical Lagrangian density and S is the classical action functional. To probe the dynamics one may add an arbitrary external source $J(\vec{x})$ for ϕ . Doing this for an interacting theory one gets a path integral representation of the generating functional of the vacuum expectations of time-ordered products of the field. GF of interacting theory can be evaluated through a perturbation series. A key result, known as Lehmann, Symanzik and Zimmerman formula, shows that GF are the building blocks to obtain *S*-matrix element and therefore the cross sections.

Let us consider the vacuum to vacuum amplitude $W[J] = \langle \Omega | \Omega \rangle_J$, with $| \Omega \rangle$ the vacuum state of the theory. It turns out that

$$W[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{iS + \int d^d x J\phi} , \qquad (9)$$

where N is a constant usually ill-defined. Set

$$W[J] = e^{iZ[J]} \; .$$

It turns out that Z is the generating functional for the connected GF

$$G_c^N(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{i^{N-1}} \frac{\delta}{\delta J_1} \ldots \frac{\delta}{\delta J_N} Z[J] \bigg|_{J=0}$$

where $J_k \equiv J(x_k)$. A problem with (9) is that the integrand is an oscillatory one, so that the path integral is not well defined. A possibility is to define W in the Euclidean space (calling it W_E) and then computing GF in the Euclidean space. After this, we recover the GF in the Minkowski space by analytic continuation.

Before proceeding, it is worth stressing the basic fact that in calculating the S-matrix the relevant quantity is the product of the residues of the GF involved in the process. Since such a product is invariant under diffeomorphisms of the fields, it follows that the scattering matrix S is invariant under such transformations.

⁵This is the case if the Hamiltonian is quadratic in the momentum $\pi(\vec{x})$.

Renormalization

An important aspect of QFT is that they have a useful representation in momentum space, in which Feynman diagrams become a systematic powerful tool to compute the cross sections of a QFT. In this beautiful procedure there is anyway a problem, because Feynman amplitudes are quite often *divergent* quantities and therefore the GF of our QFT. For such a reason, it is necessary to build a procedure, called renormalization, whose role is to remove such divergences maintaining the structure of the theory. This can appear quite magic, but it works!

Renormalization, that involves the redefinition of fields and coupling constants, works fine only for certain theories, called renormalizable. We will not sketch renormalization here, but we just note that it is possible to build several renormalization procedures. In particular, a first step in renormalizing a theory is to introduce a regularization of the relevant integrals so that they are finite, e.g. by dimensional regularization or by introducing a cut-off in the domain of integration.

An example: ϕ^4 theory

A simple example of theory with physical relevance is the so-called ϕ^4 theory. This theory is not solved exactly but one can evaluate the GF perturbatively. One starts writing the expression of the generating functional, that we consider in the Euclidean space

$$W_E[J] = e^{-Z_E[J]} = N \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4x (\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 - J\phi)} ,$$

and then computes the Euclidean GF

$$G_E^{(N)}(x_1,\ldots,x_N) = -\frac{\delta^N Z_E[J]}{\delta J_1\ldots\delta J_N}\Big|_{J=0}$$

Expanding the interaction term in power of λ one gets the perturbative series. In doing this it is necessary to build a renormalization scheme to obtain finite GF in the Euclidean space and therefore at the end one expresses GF in Minkowski space by analytic continuation and then compute the cross sections.

Applications, successes and fails

The perturbative approach is largely used in QFT, because through it we can make a great number of physical predictions, e.g. in QED and other successful theories. In particular, in QED such an approach leads to predictions of incredible accuracy like the so-called " α running" that explains how the fine structure constant α depends on the energy scale.

The main problem of this approach is that it is an approximation. In principle, it is possible to be as precise as one wants simply by computing the perturbation series to higher order of the coupling constant, i.e. λ or α , but a priori this procedure is not sure as it may look. In building the renormalization scheme one has to redefine the coupling constant using the so called counter terms. An example of this is given by QED: the series in the coupling constant $\alpha \propto e^2$

$$S(e^2) = a_0 + a_1 e^2 + a_2 e^4 + \dots ,$$

is not convergent, because if we assume a finite radius of convergence, $S(e^2)$ must be analytic at $e^2 = 0$. This means that $S(-e^2)$, i.e. $e \to ie$, is analytic. A theory with imaginary charge possesses an instable vacuum, leading to a production of space separated electron positron pairs, i.e. electrons attract each other. Since this is a contradiction of known physics, the only possibility is that the series above is not convergent. QED is also not Borel summable, and for this reason some physicist think it is not a consistent theory, due also to the existence of the Landau pole. In fact, QED fails at very high energy while it gives extremely good predictions at low energy. This could not be an essential problem, because at the scale of energy where QED loses because of Landau pole is greater than Planck energy (~ 10^{28}), so we don't even know if our description of reality with electrons and positrons is still valid at this energies.

In conclusion, the perturbative approach to QFT provides, in some range of energies, excellent numerical predictions, but one sometimes sacrifices mathematical rigorousness in the construction of the theory.

Resurgence

A recent development of interest is the phenomenon of resurgence in QM⁶, which could be of great interest if extended to QFT. This approach shows that in one dimensional QM systems with a bound-state potential V that

⁶See, for example, the paper by M. Serone, G. Spada and G. Villadoro https://arxiv.org/abs/1702.04148.

admits an alternative potential $\hat{V}(x; \lambda, \lambda_0)$ any observable can be exactly computed by a single perturbative series. This is the so called exact perturbation theory (EPT) and $\hat{V}(x; \lambda, \lambda_0)$ admits always a Borel resummable perturbation theory in λ and coincides with V when $\lambda = \lambda_0$. This tractation is an alternative way for computing the instanton contributions due to deformation of the contour of integration of the path integral if one wants to restore Borel summability.

The resurgence phenomenon has been studied for QM, but a possible extension to QED could be of great interest, because EPT works well at strong coupling constants where QFT in the perturbative approach is not always well defined. In addition, it is in principle possible to extend the results obtained for QM to non-Borel resummable QFT, like gauge theories in 4 dimensions as QED.

QFT on a lattice

QFT can be formulated on a lattice instead that on a continuous space-time. Such an approximation allows the application of analytical and numerical techniques that are very useful for studying quarks and gluons in strong interactions. In defining a lattice QFT it is extremely important to have a well-defined continuum limit, i.e. as the lattice parameter a goes to zero the continuous QFT must be restored.

By now, we will refer to QFT on a lattice as QFTL for simplicity.

Even in QFTL we are interested in defining a path integral because we know well how to compute cross sections by those integrals. However, we are not anymore in a continuum space-time, but on an ipercubical lattice

$$\Lambda = a\mathbb{Z}^4 = \left\{ x \left| \frac{x_\mu}{a} \in \mathbb{Z} \right\} \right\} , \tag{10}$$

on which is defined the scalar field $\phi(x)$. Even on the lattice it is possible to define a derivative, but one must distinguish between forward and backward derivatives. Defining the scalar product in analogy with the continuum case

$$(f \cdot g) = \sum_{x} a^4 f(x) g(x) ,$$

the forward and backward derivatives are defined as

$$\Delta^{f}_{\mu} = \frac{1}{a} \left(f(x + a\hat{\mu}) - f(x) \right) \qquad \text{forward} ,$$

$$\Delta^{b}_{\mu} = \frac{1}{a} \left(f(x) - f(x - a\hat{\mu}) \right) \qquad \text{backward} ,$$

with $\hat{\mu}$ the unit vector and $(\Delta_{\mu}^{f}f, g) = -(f, \Delta_{\mu}^{b}g)$. This leads to the following definition of the lattice d'Alembertian operator

$$\Box = -\Delta^b_\mu \Delta^f_\mu \; .$$

It is then possible to define the lattice action in the general case as

$$S[\phi, a] = S_0[\phi, a] + S_I[\phi, a] = \frac{1}{2} \left(\phi, (\Box + m^2)\phi \right) + S_I[\phi, a] , \qquad (11)$$

which enters in the generating functional of GF

$$W[J,a] = \frac{1}{W(a)} \int \prod_{x} d\phi(x) e^{-S[\phi,a] + (J,\phi)} , \qquad (12)$$

where W(a) = W[0, a]. In the free case, i.e. $S[\phi, a] = S_0[\phi, a]$, it is easy to show that (12) restores correctly the limit in the continuum when $a \to 0$. The problem is to find this limit in the interacting case to obtain well defined GF.

The fact one is working on a lattice produces some effects on the theory. For example in defining the two-point correlation function (remember that connected *n*-points functions are *n*-points FG) one may use the so called *transfer matrix* \mathbf{T} that plays the role of an evolution operator. \mathbf{T} is also a bounded, symmetric and positive operator and this is essential for having a self-adjoint Hamiltonian. If it is not possible to have an explicit representation of the transfer matrix, then one must have time reflection positivity on the lattice⁷. If this is the case, the Hamiltonian can be defined and a Hilbert space formalism exists.

Renormalization in the continuum limit and renormalization group

The lattice regularization provides a cut-off even for the momenta. For this reason, loop integration in QFTL are finite⁸ and no renormalization is needed. However, in the continuum limit one must send lattice spacing to zero and therefore there is not cut-off in the range of the momentum and renormalization is again needed. Renormalization introduces renormalized fields, coupling etc. that are treated to blow away divergences. At this point, one may see an analogy between QFTL and statistical mechanics and some

 $^{^7\}mathrm{There}$ are two possible types of reflection positivity: site-reflection positivity and link-reflection positivity.

⁸With lattice spacing the momentum lies in the first Brillouin zone, so it is different from both zero and infinity.

concepts of the latter, such as the one of transfer matrix, can be applied successfully to QFTL. One can also use the correlation length ξ , which governs the exponential decay of the correlation functions, and therefore to the propagator, and has the behaviour

$$\xi = \frac{1}{ma} \; .$$

In taking the continuum limit, with a suitable choice of the renormalization parameter a that goes to zero while m stays finite and ξ diverges. This is related to the existence of the so called critical point, i.e. a point in the phase space when there is a phase transition.

A useful method to study the theory is the *renormalization group*. The main point is to move from infinite-dimensional space of actions to the finite-dimensional subspace parametrized by those quantities like coupling constant, mass etc. renormalized in our theory. The idea is to see how renormalized quantities change when there is a changing in the lattice parameter, especially when the continuum limit is driven. For doing this it is very important to study the fixed points in the subspace defined above.

An example: ϕ^4 theory

Even in QFTL one can investigate ϕ^4 theory, and expects to find the same results derived before. What is important to notice is that the cut-off provided by the space-time lattice used in QFTL is not particularly convenient for perturbative calculations. The main purpose of the lattice is to provide a regularization which allows the application of various non-perturbative methods. However, sometimes it is necessary to perform perturbative calculations with a lattice cut-off, in particular if quantities calculated by non-perturbative methods are related to quantities calculated perturbatively. Furthermore, some quantities of numerical interest, such as finite volume effects, can be calculated in lattice perturbation theory.

Even in QFTL one can find the Feynman rules to evaluate GF, but there are some differences with the continuum case. Especially, in performing loop integrations only the momenta in the first Brillouin zone are involved. In this way, one may compute GF on the lattice for the perturbative expansion of ϕ^4 theory, but such quantities diverge in taking the continuum limit. When this happens, one applies a renormalization scheme and removes the divergences.

Applications, successes and fails

An interesting application of QFTL is the one with QCD. As the reader probably knows, QCD has the property of being an asymptotically free theory, i.e. the coupling constant increases with the distance. For this reason, the description of the long distance strong colour force requires a non-perturbative approach, and this can be done in QFTL. In particular, lattice QCD gives a prediction on the mass of the quarks.

Another interesting application is the construction of simulation algorithms: as easily understandable it is not possible to calculate continuum quantities as a field numerically. The only possibility is to discretize space-time, and this means that we must build a QFTL for numerical applications.

Finally, QFTL is used in solid state physics and condensed matter physics, where it is not rare to work with systems with a particular symmetry or with a lattice.

As pointed before, QFTL is essentially a non-perturbative approach that works thanks to the discretization of space-time. Anyway, even in this case most of the theory needs, for explicit calculations, to use perturbative techniques.

Schrödinger representation formalism

In QFT is worth of mention the Schrödinger representation, a natural extension of non relativistic QM used for atomic physics.

The idea is to proceed analogously to what we did in QM but using a mathematics consistent with the fact that we are working with fields, so we will expect to work with functional differential equations instead of differential equations as in QM.

Let us consider the case of the free scalar field theory whose action is given in (3). One can construct the conjugate field momentum π and the Hamiltonian H as

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \dot{\varphi}(x) ,$$

$$H = \frac{1}{2} \int d^3x \left(\pi^2 + |\nabla \phi|^2 + m^2 \phi^2 \right) .$$

As in QM we defined the CCR for position and momentum, here we do the same for the field operator φ and its conjugated π

$$[\varphi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = i\delta(\vec{x}-\vec{y}) , \qquad (13)$$

$$[\varphi(\vec{x},t),\varphi(\vec{y},t)] = [\pi(\vec{x},t),\pi(\vec{y},t)] = 0.$$
(14)

It is now possible to switch to a coordinate Schrödinger representation and work with a basis for the Fock space where the field operator φ is diagonal. If $|\phi\rangle$ is an eigenstate of φ with eigenvalue ϕ then the coordinate representation of the state $|\Psi\rangle$ is the wave functional

$$\Psi[\phi] = \langle \phi | \Psi \rangle$$
.

It is also possible to give a functional differential representation of the equal time commutator (13) using

$$\pi(\vec{x}) = -i \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{x})} \; ,$$

so that

$$\left[\frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})},\phi(\vec{y})\right] = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \ .$$

The differential representation of the momentum field operator turns the Hamiltonian operator in a functional differential operator

$$H_0 = \frac{1}{2} \int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta \phi(\vec{x})^2} + |\nabla \phi|^2 + m^2 \phi^2 \right) \,,$$

and the Schrödinger equation in a differential functional equation

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi[\phi,t] = \frac{1}{2}\int d^3x \left(-\frac{\delta^2}{\delta\phi(\vec{x})^2} + |\nabla\phi|^2 + m^2\phi^2\right)\Psi[\phi,t] .$$
(15)

Even if we are dealing with the simplest case of free field theory, this equation can be solved easily only for the ground state because we can use the property that the wave functional of the ground state is always positive and has no nodes. Although, through a little bit of calculation it is possible to find Ψ even for excited states.

Results

Resolving (15) when is time independent is possible to find the energy of the ground state E_0 and also the energy of the excited state E_i .

It is also possible to show that the energy eigenstate $\Psi_1[\phi]$ with energy ω_{k_1} is also a momentum eigenstate with momentum \vec{k}_1 . This can be used to describe a state with one particle with four-momentum k_1 and mass m. This

leads to the Schrödinger representation of creation and destruction operators, respectively a^{\dagger} and a

$$a(\vec{k}) = \int d^3x e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\omega_k \phi(\vec{x}) + \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\right) ,$$

$$a^{\dagger}(\vec{k}) = \int d^3x e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left(\omega_k \phi(\vec{x}) - \frac{\delta}{\delta\phi(\vec{x})}\right) .$$

It is also possible to compute the propagator. If the initial state is a particle located at \vec{x} at time t and the final state is the one with the particle located at \vec{x}' at t', then the initial wave functional is $\phi(\vec{x})\Psi_0[\phi, t]$ and the final one is $\phi(\vec{x}')\Psi_0[\phi, t']$. One may check that the propagator is

$$\langle 0|\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle\theta(t'-t) = \int \mathcal{D}\phi\phi(\vec{x}')\phi(\vec{x})\Psi_0^*[\phi,t']\Psi_0[\phi,t] ,$$

where $|0\rangle$ denotes the vacuum state and the theta function is necessary because t' > t. It turns out that⁹

$$\langle 0|\varphi(x')\varphi(x)|0\rangle\theta(t'-t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} e^{ik(x-x')}\theta(t'-t) \, dt$$

where $\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$.

Interacting field

One of the main goals of interacting QFT is to compute the cross section for scattering processes. In the perturbative operator formalism this means computing the S-matrix elements in terms of initial and final states and field operators and we have seen that such quantities are related to GF computed in perturbation theory.

In the Schrödinger representation the dynamics instead resides in the states, not in the operators, so we do not compute GF. Since *S*-matrix elements are defined as an overlap between initial and final states, what one needs to compute is the initial and final interacting states. Such states are computed perturbatively.

It should be mentioned that the formalism extends to photon and spinor fields. It is also possible to give a Feynman diagram interpretation of this procedure, but the most important thing is to underline that this way of

⁹See, for example, pg.208 of B. Hatfield, "Quantum Field Theory of Point Particles and Strings", Perseus Books, 1992.

computing the S-matrix is completely equivalent, and gives the same results, as the other formulations. Let us consider the case of the ϕ^4 theory.

An example: ϕ^4 theory

The Hamiltonian of the ϕ^4 theory reads

$$H = H_0 + H_{int} = H_0 + \int d^3x \frac{1}{2} \delta m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 .$$

It is possible to obtain the vacuum state and the energy spectrum of such an interacting theory by using the Rayleigh-Schrödinger perturbation theory. This is developed by first writing $H = H_0 + \alpha H_{int}$, where the dimensionless parameter α ranges between 0 and 1, and then performing a series expansion both in the wave functional Ψ and in the energy eigenvalues E

$$\Psi_N[\phi] = \Psi_N^{(0)}[\phi] + \alpha \Psi_N^{(1)}[\phi] + \alpha^2 \Psi_N^{(2)}[\phi] + \dots ,$$

$$E_N = E_N^{(0)} + \alpha E_N^{(1)} + \alpha^2 E_N^{(2)} + \dots ,$$

and then placing this expansion in $H\Psi_N[\phi] = E_N\Psi_N[\phi]$. In analogy with Z[J] it is possible to define a functional $\mathcal{G}[J]$ which is the generator of the momenta of $\Psi_0^{*(0)}\Psi_0^{(0)}$ (where $H_0\Psi_0^{(0)} = E_0^{(0)}\Psi_0^{(0)}$), namely

$$\left\langle \Psi_0^{(0)} | \phi(\vec{x}_1) \dots \phi(\vec{x}_n) | \Psi_0^{(0)} \right\rangle = \left. \frac{\delta^n \mathcal{G}\left[J\right]}{\delta J_1 \dots \delta J_n} \right|_{J=0} \,. \tag{16}$$

By means of $\mathcal{G}[J]$ it is possible to compute, order-by-order, the energy excitations and the corrections to the wave functional.

Application, successes and fails

The Schrödinger representation approach is, even now, less favored then others approaches to QFT. This fact has some historical reasons, but it is also due to the fact that the Schrödinger representation is not explicitly Lorentz invariant and its renormalizability was proven only in 1980 by Symanzik. Since Lorentz invariance and renormalizability play a central role in QFT, the Schrödinger representation approach was initially less considered.

However, this approach is very versatile, the reason is that it is focused on the time evolution of the state of the system. The problems with such a formulation are essentially the same of the others perturbative approaches, i.e. it is very difficult to find analytical solutions for interacting systems and renormalization is needed.

Spontaneous symmetry breaking

The concept of symmetry, and therefore of symmetry breaking, is of central importance in physics. It is necessary to make a distinction between a theory with a finite number of degrees of freedom, that we call QM_{fin} , and a theory with infinite number of degrees of freedom, QM_{∞} .

For the first type of theory is valid the following theorem by von Neumann

von Neumann unicity theorem. An algebraic symmetry $(q, p) \rightarrow (q', p')$ with $[q'_i, p'_i] = i\hbar \delta_{ij}$ in \mathbb{R}^n , with n finite, is inducted by a unitary operator U

$$q'_i = Uq_i U^{\dagger} \qquad p'_i = Up_i U^{\dagger}$$

This implies that in QM_{fin} every symmetry in the equation of motion is an exact symmetry. For this reason it is not possible to have SSB in QM_{fin} .

The scenario changes when we deal with QM_{∞} , that is essentially QFT. With this type of theory the von Neumann unicity theorem is no longer valid, therefore there are inequivalent representations of the CCR, i.e. not connected by unitary or antiunitary operators. It follows that a symmetry of the equations of motion does not necessarily imply an exact symmetry. So, there could be a correspondence between a symmetry in the equations of motion and a transformation law that does not preserve transition amplitudes, unlike QM_{fin} .

A key theorem in studying SSB is the one by Goldstone, stating that

Goldstone theorem. Consider a generic continuous symmetry which is spontaneously broken, i.e. currents are conserved but the ground state is not invariant under the action of corresponding charges. Then new massless particles, called **Goldstone bosons**, appear: in particular, there is a Goldstone boson for every broken generator of the symmetry group.

Goldstone theorem is fundamental for the classical description of the Higgs mechanism, whose effect is the prediction of Higgs boson.

In the Higgs mechanism, there is a spontaneously broken global symmetry within a theory (the electroweak theory) that has a local gauge invariance. It is important to cite the *Elitzur theorem*, that states

Eltzur theorem. An Abelian gauge theory formulated on the lattice cannot be spontaneously broken.

Physical examples

SSB is of basic importance in physics, because it plays a central role in a variety of physical processes. Here we give a sketch of some of the main processes where SSB is involved:

- Ferromagnetism.
- Superfluidity.
- Superconductivity.
- Higgs mechanism.
- Convection cells in fluids.

Stefano De Angelis

The study of the representation theory of the Poincaré group could start from Wigner's idea for the classification of elementary particles. In nonrelativistic Quantum Mechanics, elementary particles are identified as the spaces of irreducible representations of the algebra generated by the set of observables $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{S}}\}$. Nevertheless, when Quantum Mechanics and Special Relativity are put together, this classification becomes meaningless since the position \hat{x}^{μ} can no longer be an observable.

Wigner's idea was that elementary particles might have been classified as spaces of *irreducible representations* of space-time symmetry group, *i.e. proper Poincaré group* $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$, where " \rtimes " stands for the *semi-direct product* of groups. \mathcal{L}_{+} (*special* Lorentz group) and \mathcal{L}^{\uparrow} (*orthochronous* Lorentz group) stand for the subgroups of $\mathcal{L} \simeq O(1,3)$ whose elements respectively satisfy the conditions

$$\det \Lambda = 1 , \qquad \qquad \Lambda^0_{\ 0} \ge 0 . \tag{17}$$

 $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ is the so called *proper* Lorentz group.

The spaces of irreps of $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ describe physical states, which are rays in a Hilbert space, that is sets of non-zero vectors differing by a complex scalar factor or, if one is considering normalized states, by a phase factor. Therefore, one has to consider *projective representations* of the Poincaré group acting on ray spaces, or equally, via *Bargmann's theorem*, the unitary representations of its *universal covering group* $\tilde{\mathcal{P}}^{\uparrow}_{+} = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{C}).$

Unitary representations will be characterized by mean of Wigner's trick. Later an alternative and more conventional way to find group representations will be shown. This brings to the same results in a simpler, even though less intuitive, way. Wigner's trick splits into four main steps.

First of all, characterize unitary irreps of $\mathbb{R}^{1,3}$, which have to be one dimensional, since the group is abelian. Consider the four-momentum operator \hat{P}^{μ} and its (generalized) eigenstates $|p\rangle$

$$\hat{P}^{\mu}|p\rangle = p^{\mu}|p\rangle , \qquad (18)$$

where $p^{\mu} \in \sigma(\hat{P}^{\mu}) = \{p^{\mu} \in (\mathbb{R}^{1,3})^*\}$.¹⁰ Take $a^{\mu} \in \mathbb{R}^{1,3}$ and define

$$\hat{U}(a^{\mu}) = e^{ia^{\mu}\cdot\hat{P}_{\mu}} . \tag{19}$$

 $[\]overline{{}^{10}(\mathbb{R}^{1,3})^*}$ denotes the space of four-momenta, eigenvalues of \hat{P}_{μ} , in order to distinguish this from the space of translations $\mathbb{R}^{1,3} \ni a^{\mu}$.

This gives the one-dimensional unitary irreps which one is looking for. Indeed

$$\hat{U}(a^{\mu})|p\rangle = e^{ia^{\mu} \cdot p_{\mu}}|p\rangle , \qquad (20)$$

i.e. $\hat{U}(a^{\mu})$ simply multiplies basis vectors $\{|p\rangle\}_{p\in(\mathbb{R}^{1,3})^*}$ by a number $\exp(ia^{\mu}p_{\mu})$. Since $|p\rangle$ is not normalizable, it can not be a ray of the Hilbert space. Therefore consider $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ and let $\hat{U}(a)$ act on $|\psi\rangle$

$$\hat{U}(a): \psi(p) = \langle p|\psi\rangle \to \langle p|\hat{U}(a)|\psi\rangle = e^{ia\cdot p}\langle p|\psi\rangle = e^{ia\cdot p}\psi(p) \quad .$$
(21)

Once $p^{\mu} \in (\mathbb{R}^{1,3})^*$ is fixed, $\psi(p) = \langle p | \psi \rangle \in \mathbb{C}$ and $\dim(U) = 1$. Then the p^{μ} 's characterize the unitary representations of $\mathbb{R}^{1,3}$.

Secondly, \mathcal{H} has to be the space of a unitary irrep of the group $\mathbb{R}^{1,3} \rtimes \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ (not $\mathbb{R}^{1,3}$ itself), then the structure of the set of p^{μ} 's in an irrep of this group has to be studied. Consider the space $(\mathbb{R}^{1,3})^*$, thus it is necessary to find how this space is divided by curves which are invariant under the action of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, because these have to be related to \mathcal{H} (for hypothesis this is the space of an irreducible representation). Once p^{μ} is fixed, associate it with a 2×2 matrix

$$\sigma_{\mu}p^{\mu} = \begin{pmatrix} p^{0} + p^{3} & p^{1} + ip^{2} \\ p^{1} - ip^{2} & p^{0} - p^{3} \end{pmatrix} , \qquad (22)$$

and, in view of the fact that $Tr(\sigma_{\mu}\sigma_{\nu}) = 2\delta_{\mu\nu}$,

$$p^{\mu} = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(p_{\nu} \sigma^{\nu} \sigma_{\mu}) . \qquad (23)$$

Now consider $A \in SL(2, \mathbb{C})$,

$$A\sigma_{\mu}p^{\mu}A^{\dagger} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\left(A\right)\sigma_{\mu}p^{\nu} , \qquad (24)$$

where

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(\sigma^{\mu} A \sigma_{\nu} A^{\dagger}) .$$
⁽²⁵⁾

It follows from the previous relation that every transformation Λ^{μ}_{ν} can be specified by two matrices $\pm A$, *i.e.* $\Lambda^{\mu}_{\nu}(A) = \Lambda^{\mu}_{\nu}(-A)$ (indeed it can be shown that $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+} \simeq \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$). After few calculations one finds

$$\det \left(A \sigma_{\mu} p^{\mu} A^{\dagger} \right) = \det \left(\sigma_{\mu} p^{\mu} \right) = p^{\mu} p_{\mu} = m^2 \in \mathbb{R} .$$
 (26)

Therefore every orbit of $SL(2, \mathbb{C})$ in $(\mathbb{R}^{1,3})^*$ is characterized by m^2 . Three main cases can be distinguished:

• $m^2 < 0$: these are hyperboloids of one sheet;

- $m^2 = 0$: this is the conical surface;
- $m^2 > 0$: these are hyperboloids of two sheets.

Since p^{μ} is the four-momentum of the particle, m is its mass. Thus it is possible to restrict to physical cases only, that are the orbits on which $m^2 \ge 0$ and $p^0 \ge 0$. In other words one considers only the positive light cone. Thus physical orbits are

- $m^2 > 0$ and $p^0 > 0$: one sheet of the hyperboloids of the third case, they stand for massive particles;
- $m^2 = 0$ and $p^0 > 0$: this is the light cone (except for the origin) and it stands for massless particles;
- $m^2 = 0$ and $p^0 = 0$: the origin is itself an orbit, which is invariant under the action of all $SL(2, \mathbb{C})$ and it stands for the *vacuum state*.

There is now some difficulty since it is not possible to define the Hilbert space as

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{p \in \text{orbit}} \mathcal{H}_p , \qquad (27)$$

because it is quite evident that \mathcal{H} is not separable. This kind of problem is the same observed when one introduces the Hilbert space $L^2(\mathbb{R})$. Indeed the space of one variable functions is not separable, but, by introducing the *Lebesgue measure*, contributions of single points are avoided and the space becomes separable. In this sense the sum over p^{μ} is substituted by an *direct integral*

$$\bigoplus_{p \in \text{orbit}} \to \int^{\oplus} . \tag{28}$$

Then it has to be defined a measure which has to be supported on the orbit and $SL(2, \mathbb{C})$ invariant. It can be proved that there exists only one metric satisfying these conditions, that is

$$d\mu(p) = d^4 p \,\delta(p^2 - m^2) \,\theta(p^0) \,\,, \tag{29}$$

where $\theta(p^0)$ is Heaviside's theta. \mathcal{H} is the space of a unitary irrep of $\tilde{\mathcal{P}}_+^{\uparrow}$, thus

$$\mathcal{H} = \int^{\oplus} d^4 p \,\delta(p^2 - m^2) \,\theta(p^0) \,\mathcal{H}_p \,. \tag{30}$$

The scalar product in \mathcal{H} is generated by the scalar product in \mathcal{H}_p , which is a complex Hilbert space of d(p) dimensions: if $\psi, \phi \in \mathcal{H}$

$$(\psi,\phi)_{\mathcal{H}} \equiv \int d^4p \,\delta(p^2 - m^2) \,\theta(p^0) \,(\psi_p,\phi_p)_{\mathcal{H}_p} \,. \tag{31}$$

Thus $\phi \in \mathcal{H}$ iff

$$(\phi,\phi)_{\mathcal{H}} := \int d^4 p \,\delta(p^2 - m^2) \,\theta(p^0) \,(\phi_p,\phi_p)_{\mathcal{H}_p} < \infty \ . \tag{32}$$

The Hilbert space has been completely defined and, to complete the classification, one should find d(p). Let $A \in SL(2, \mathbb{C})$ act on a representative p^{μ} of an orbit

$$\hat{P}^{\mu}U_{\mathcal{H}}(A)|p,\alpha\rangle = U_{\mathcal{H}}(A)U_{\mathcal{H}}(A)^{-1}\hat{P}^{\mu}U_{\mathcal{H}}(A)|p,\alpha\rangle = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A)p^{\nu}U_{\mathcal{H}}(A)|p,\alpha\rangle ,$$

where α stands for the components in \mathcal{H}_p and $U_{\mathcal{H}}(A)^{-1}\hat{P}^{\mu}U_{\mathcal{H}}(A) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A)\hat{P}^{\mu}$. Thus $U_{\mathcal{H}}(A)|p,\alpha\rangle$ is a (generalized) eigenstate of \hat{P}^{μ} . Since $U_{\mathcal{H}}$ is a unitary representation

$$\langle p, \alpha | U_{\mathcal{H}}^{\dagger}(A) = \langle p, \alpha | U_{\mathcal{H}}(A^{-1}) ,$$
 (33)

which tells that the action of $U_{\mathcal{H}}$ on \mathcal{H}_p is

$$U_{\mathcal{H}}(A)\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_{\Lambda(A^{-1})p} = \mathcal{H}_{\Lambda^{-1}(A)p} .$$
(34)

Then, in order to be invariant under $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$, $\mathrm{d}(p)$ remains constant for one single orbit. But now it has to be explained how the α components are mixed. The answer is provided by using the following lemma. Once k^{μ} , representative of an orbit $(p^{\mu}p_{\mu} = m^2 \geq 0)$, is fixed, the action of $U_{\mathcal{H}}(A)$ on $|p,\alpha\rangle$ with $\alpha = 1,\ldots,\mathrm{d}(p)$ can be decomposed in the product of two transformations: a boost that maps k in Λp (it is denoted $U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p})$ and $U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p})|k,\alpha\rangle := |\Lambda p,\alpha\rangle$) and an element of the isotropy group of k, $\mathrm{Iso}(k)$, that is the subgroup of $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ which does not change k^{μ} .

$$U_{\mathcal{H}}(A) = U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p})U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p}^{-1}AB_p) , \qquad (35)$$

where

$$U_{\mathcal{H}}(B_p)|k,\alpha\rangle := |p,\alpha\rangle . \tag{36}$$

It is straightforward to prove that $U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p}^{-1}AB_p := \tilde{A}_p)$ is a representation of $\operatorname{Iso}(k)$:

$$U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p}^{-1}AB_p)|k,\alpha\rangle = U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p}^{-1})U_{\mathcal{H}}(A)|p,\alpha\rangle = U_{\mathcal{H}}(B_{\Lambda p}^{-1})|\Lambda p,\beta\rangle = |k,\beta\rangle$$

Therefore

$$U_{\mathcal{H}}(A_p)|k,\alpha\rangle := D_{\beta\alpha}(A_p)|k,\beta\rangle \in \mathcal{H}_p , \qquad (37)$$

where $D_{\beta\alpha}(\tilde{A}_p)$ is an irrep of Iso(k).

Finally, the fourth and also the last step is to classify the irreps of Iso(k) in the three different physical cases.

• $p^{\mu}p_{\mu} = m^2 > 0$: $k^{\mu} = (m, 0, 0, 0)$ can be chosen, that is a rest particle in a reference frame, thus

$$k^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} m & 0\\ 0 & m \end{pmatrix} .$$
 (38)

 $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ such that

$$A(k^{\mu}\sigma_{\mu})A^{\dagger} = k^{\mu}\sigma_{\mu} ,$$

is every $A \in \mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$. Irreps of $\mathrm{SU}(2,\mathbb{C})$ are labeled by $j \in \mathbb{N}/2$, that is the *spin*. Therefore it can be argued that massive particles are completely characterized by their mass and spin.

• $p^{\mu}p_{\mu} = 0$: $k^{\mu} = (1, 0, 0, 1)$ can be a representative, thus

$$k^{\mu}\sigma_{\mu} = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{39}$$

After some calculations it is found that the more general element of Iso(k) is written as

$$A = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & x + iy \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} , \qquad (40)$$

where $x, y \in \mathbb{R}$. It is straightforward to show that there are two natural subgroups

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad T(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & x+iy\\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad (41)$$

A brief calculation brings

$$R(\theta)T(x,y)R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & (x\cos 2\theta - y\sin 2\theta) + i(y\cos 2\theta + x\sin 2\theta) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Therefore $\operatorname{Iso}(k) := \mathbb{R}^2 \rtimes \operatorname{SO}(2)$, where $\operatorname{SO}(2)$ is the double (non universal) covering of $\operatorname{SO}(2)$. Indeed from the above expression, one sees that $R(\theta) \in \operatorname{SO}(2)$ is a rotation of angle 2θ in the \mathbb{R}^2 plane, such that $\theta = 2\pi$ corresponds to two complete rotations. Let consider only the trivial representation of \mathbb{R}^2 , because one is interested in finite-dimensional representations of $\operatorname{Iso}(k)$ (particles with continuous spin have not been observed in nature). Irreps of $\operatorname{SO}(2)$ are labeled by $n \in \mathbb{Z}$ ($n : \theta \to e^{in\theta}$), then the ones of $\operatorname{SO}(2)$ are labeled by $\epsilon \in \mathbb{Z}/2$. Then massless elementary particles are characterized by their *helicity* ϵ , which is the projection of the spin on the direction of \mathbf{p} . Indeed direction of motion of massless particle can not be reversed by a proper Lorentz transformation, while for massive ones $\mathbf{S} \cdot \mathbf{p}$ depends on the reference frame.

• The last and simpler case that has to be considered is the vacuum state: the measure of the direct integration in this case is $d\mu(p) = d^4p \,\delta^4(p^\mu)$ and then $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_0$. $p^\mu = 0$ is invariant under the action of all SL(2, \mathbb{C}), then the vacuum state is a one dimensional Hilbert space.

Behaviour of local fields under the Poincaré group. Relativistic covariance

Stefano De Angelis

Take a point in Minkowski space-time and let x^{μ} be its coordinates with respect to a reference frame I. Coordinates x'^{μ} , in a different reference frame I', can be expressed in terms of a Poincaré transformation

$$x^{\mu} \to x^{\prime \mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu} , \qquad (42)$$

where

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} . \tag{43}$$

Let us derive the expression of the ten generators of this transformation. Consider an infinitesimal Lorentz transformation

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \delta^{\mu}_{\ \nu} + \epsilon^{\mu}_{\ \nu}, \tag{44}$$

where δ^{μ}_{ν} is the Kronecker delta. Evaluation of (43) yields to

$$0 = g_{\nu\rho} \,\epsilon^{\rho}{}_{\mu} + g_{\mu\rho} \,\epsilon^{\rho}{}_{\nu} \,\,, \tag{45}$$

which becomes

$$0 = \epsilon_{\nu\mu} + \epsilon_{\mu\nu} , \qquad (46)$$

that is $\epsilon_{\mu\nu}$ is an antisymmetric tensor, with six independent entries. An infinitesimal variation due to Lorentz transformation can be written as

$$\delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu\rho} x_{\rho} := \frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} x^{\mu} , \qquad (47)$$

where the $L_{\mu\nu}$'s are Hermitian operators

$$L_{\mu\nu} = i \left(x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu} \right). \tag{48}$$

It is easy to verify that the $L_{\mu\nu}$'s satisfy Lie algebra of SO(1,3)

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} .$$
(49)

The most general representation of the generators of SO(1,3) that obeys the commutation relations (49) is given by

$$J_{\mu\nu} := L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} , \qquad (50)$$

where the $S_{\mu\nu}$'s satisfy the same Lie algebra as the $L_{\mu\nu}$'s and commute with them.

As it can be seen from (42), Poincaré transformations include also uniform translations in space and time

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} ,$$
 (51)

where a^{μ} is an arbitrary constant four-vector. The translations do not commute with the Lorentz transformations: indeed examine two successive Poincaré transformations, that is

$$x^{\mu} \to \Lambda_{1}{}^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + a_{1}{}^{\mu} \to \Lambda_{2}{}^{\mu}{}_{\rho}\Lambda_{1}{}^{\rho}{}_{\nu}x^{\nu} + \Lambda_{2}{}^{\mu}{}_{\rho}a_{1}{}^{\rho} + a_{2}{}^{\mu} , \qquad (52)$$

i.e. the translation parameters a_1^{μ} get rotated as a four-vector has to do. In this sense it can be said that $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ is the semi-direct product of $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$ and $\mathbb{R}^{1,3}$. In order to obtain the algebra of the generators, observe that the change in x^{μ} under an infinitesimal translation is

$$\delta x^{\mu} = \epsilon^{\mu} := i\epsilon^{\rho} P_{\rho} x^{\mu} , \qquad (53)$$

such that the P_{μ} 's are the Hermitian operators

$$P_{\mu} = -i\partial_{\mu} \ . \tag{54}$$

They satisfy the commutation rules

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 , \qquad (55)$$

and

$$[J_{\mu\nu}, P_{\rho}] = -ig_{\mu\rho}P_{\nu} + ig_{\nu\rho}P_{\mu} , \qquad (56)$$

that is P_{μ} transforms like a four-vector. The commutation relations (49), (55) and (56) define the Lie algebra of the Poincaré group.

Now irreps of $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ can be classified in an alternative way than before simply doing some considerations on its algebra. It is quite obvious that the "length" $P_{\mu}P^{\mu}$ of the four-vector P^{μ} is invariant under Poincaré transformations, thus it can be seen as a Casimir operator. Since the Lie algebra of $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ has rank 2, one has to construct an other Casimir operator. The length of any four-vector which commutes with the P^{μ} 's will be a good one: the *Pauli-Lubanski* four-vector does it and it is defined by

$$W^{\mu} := \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} J_{\rho\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_{\nu} S_{\rho\sigma} .$$
 (57)

Then irreps of $\mathcal{P}^{\uparrow}_{+}$ (or, to be more precise, of its covering group) are characterized according the values of Casimir operators and three cases can be distinguished.

- The eigenvalues of $P^2 = m^2$ are real positive numbers. $W^2 = -m^2 \mathbf{S}^2 = -m^2 s(s+1)$, where $s \in \mathbb{N}/2$. These representations are labeled by the mass m and the spin s. States within them are distinguished by the third component of the spin $s_3 = -s, -s+1, \ldots, s-1, s$ and the continuous eigenvalues of P_i .
- The eigenvalue of P² is zero, corresponding to a particle of zero rest mass. W² is also zero. From (57) it is easy to verify P^μW_μ = 0, *i.e.* P^μ and W^μ are proportional. The constant of proportionality, called helicity, well labels representations and it is equal to s, where s ∈ Z/2. States with same helicity are distinguished by the three values of their momenta along x, y and z directions, **P**.
- Finally the case previously excluded: $P^2 = 0$ and $W^2 = \alpha^2 \mathbb{I}$, where α is a real number. In this case the corresponding infinite-dimensional representation is characterized by continuous spin. Most likely, this type of representation does not correspond to any real particles.

Consider an arbitrary field as a function of space-time point in a reference frame I, $f_a(x^{\mu})$ with a = 1, ..., n. If one moves to an other inertial frame I', the field will be written as $f'_a(x'^{\mu})$, because the functional transformation will be in general frame-dependent. Write the change in the function for an infinitesimal transformation as

$$\delta f_a := f'_a(x') - f_a(x) \ . \tag{58}$$

Let observe that

$$f'_{a}(x+\delta x) - f_{a}(x) = f'_{a}(x) - f_{a}(x) + \delta x^{\mu} \partial_{\mu} f'_{a}(x) + O(\delta x) .$$
 (59)

To $O(\delta x)$, $\partial_{\mu} f'_a$ is replaced by $\partial_{\mu} f_a$

$$\delta f_a = \delta_0 f_a + \delta x^\mu \partial_\mu f_a(x) + O(\delta x) , \qquad (60)$$
where the *functional change* at the same x has been introduced

$$\delta_0 f_a = f'_a(x) - f_a(x) . (61)$$

The second term on the right side in (60) is called *transport term*. One can formally see (61) as an operator equation

$$\delta = \delta_0 + \delta x^\mu \partial_\mu \ . \tag{62}$$

To refer to representations of Poincaré group means to consider how the functional structure of $f_a(x)$ changes under its transformations. Thus if one wants to study generators of Poincaré group, $\delta_0 f_a$ has to been considered, not δf_a .

To know how a given field transforms helps to define different Lagrangian densities which are Poincaré invariant and from which motion equations are extracted. Therefore, informations about general aspects of dynamics can be obtained from the study of Poincaré group representations and their properties. Equivalently, it is also possible to start from motion equations of fields and, vice versa by requiring relativistic covariance, to determine transformation properties of them.

Under a translation in space-time, there is no change in a local field, that is

$$\delta f = 0 , \qquad (63)$$

or

$$\delta_0 = -\epsilon^\mu \partial_\mu f_a(x) = -i\epsilon^\mu P_\mu f_a(x) . \qquad (64)$$

Under Lorentz transformation the situation is more complicated

$$f_a(x) \to f'_a(x') = D_{ab}(\Lambda) f_b(x) , \qquad (65)$$

where $D(\Lambda)$ is a $n \times n$ matrix, *i.e.* a finite-dimensional representation of Lorentz group. As explained before, functional change $f'_a(x) - f_a(x)$ is needed:

$$f'_{a}(x) = D_{ab}(\Lambda)f_{b}(\Lambda^{-1}x) , \qquad (66)$$

whose infinitesimal form is

$$f'_{a}(x) = \left(\mathbb{I}_{ab} - \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu} (S_{\mu\nu})_{ab}\right) f_{b}(x^{\mu} - \epsilon^{\mu}_{\ \nu}x^{\nu}) .$$
(67)

Therefore functional change is

$$\delta_0 f_a = -\frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} \left(S_{\mu\nu} \right)_{ab} f_b(x) - \frac{i}{2} \epsilon^{\mu\nu} L_{\mu\nu} f_a(x) , \qquad (68)$$

where the $L_{\mu\nu}$'s have been defined in (48). Then the generators of Lorentz transformations for fields are

$$J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} , \qquad (69)$$

where the matrices $S_{\mu\nu}$'s are a finite-dimensional representation of the Lie algebra of $\mathcal{L}^{\uparrow}_{+}$. In the next section they are going to be classified and their properties discussed.

Now consider how quantized field operators $\hat{f}_a(x)$ transform. Physical observables are given in matrix element form, that is

$$\langle \Phi_{\alpha} | \hat{f}_a(x) | \Phi_{\beta} \rangle$$
 (70)

This matrix element are the analogous of amplitude $f_a(x)$. An observer in a different reference frame sees the amplitude

$$\langle \Phi'_{\alpha} | \hat{f}_a(x') | \Phi'_{\beta} \rangle , \qquad (71)$$

where $|\Phi'_{\alpha}\rangle$ and $|\Phi'_{\beta}\rangle$ stand for the states as seen in the second reference frame. For what concerns the field operator, notice that transformation is only for its argument, consistently with Heisenberg picture. Amplitude (71) is the quantum analogous of $f'_{a}(x')$, thus, as seen before,

$$\langle \Phi'_{\alpha} | \hat{f}_a(x') | \Phi'_{\beta} \rangle = D_{ab}(\Lambda) \langle \Phi_{\alpha} | \hat{f}_b(x) | \Phi_{\beta} \rangle \quad .$$
(72)

Transformations of states are represented by a unitary operator

$$|\Phi'_{\alpha}\rangle = U(\Lambda, a)|\Phi_{\alpha}\rangle .$$
(73)

Rewrite (72), using (73) and $D_{ab}^{-1}(\Lambda) = D_{ab}(\Lambda^{-1})$, in order to achieve

$$U(\Lambda, a)\hat{f}_a(x)U^{-1}(\Lambda, a) = D_{ab}(\Lambda^{-1})\hat{f}_b(\Lambda x + a) .$$
(74)

This seems quite peculiar, indeed transformations affect classical fields (66) inversely than quantum field operators.

Finite-dimensional irreducible representations of the Lorentz group

Stefano De Angelis

Physical motivations for the study of finite-dimensional representations of $\mathcal{L}_{+}^{\uparrow}$, or to be more precise of its covering group $SL(2,\mathbb{C})$, has just been discussed, thus the classification of its irreps are going to be presented.

Let start from some mathematical considerations. Finite-dimensional representations of $SL(2, \mathbb{C})$ are in one-to-one correspondence with representations of its algebra $sl(2, \mathbb{C})$ (since the group is connected and simply connected), which are one-to-one with those of $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}}$. It can be shown that $sl(2, \mathbb{C})_{\mathbb{C}} \simeq su(2)_{\mathbb{C}} \oplus su(2)_{\mathbb{C}}$, whose finite-dimensional representations are in one-to-one correspondence with those of $su(2) \oplus su(2)$ and thus with those of $SU(2) \otimes SU(2)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) &\leftrightarrow \mathrm{sl}(2,\mathbb{C}) \leftrightarrow \mathrm{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{C}} \simeq \mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}} \oplus \mathrm{su}(2)_{\mathbb{C}} \\ &\leftrightarrow \mathrm{su}(2) \oplus \mathrm{su}(2) \leftrightarrow \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(2) \ . \end{aligned}$$

 $SU(2) \otimes SU(2)$ is a compact group, thus its representations are finite-dimensional and (equivalent to) unitary (ones). Therefore, representations of its algebra have to be Hermitian finite-dimensional matrices because of the exponential. Now let construct, by opportune (complex) combinations of the generators of Lorentz group, two sets of generators which obey to the algebra of SU(2). Start from the algebra of finite-dimensional generators of Lorentz group (49)

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = ig_{\nu\rho}S_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}S_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}S_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}S_{\nu\rho} , \qquad (75)$$

where, of course $S_{\mu\nu} = -S_{\nu\mu}$ and indices on $S_{\mu\nu}$ are usual raised or lowered by contraction with $g_{\mu\nu}$ or $g^{\mu\nu}$. To see how to construct desired matrices, first divide the six components of $S_{\mu\nu}$ into two three-vectors, *i.e. angular* momentum matrices

$$J_1 = S_{23} , \qquad J_2 = S_{31} , \qquad J_3 = S_{12} , \qquad (76)$$

and *boost* ones

$$K_1 = S_{10} , \qquad K_2 = S_{20} , \qquad K_3 = S_{30} .$$
 (77)

Algebra (75) reads

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k , \qquad (78)$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k , \qquad (79)$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k , \qquad (80)$$

where i, j, k run over the values 1, 2, 3 and ϵ_{ijk} is the total antisymmetric quantity with $\epsilon_{123} := +1$. The algebra (78) just says that **J** matrices generate a representation of the rotational subgroup of the Lorentz group (which determines the spin of the representation), and (79) just represents the fact that **K** is a three-vector. The minus sign in the right-hand equation of (80) arises from the fact that $g_{ii} = -1$ and it plays a crucial role in what follows. Indeed replace the matrices **J** and **K** with two decoupled spin-like three-vectors, writing

$$\mathbf{A} := \frac{1}{2} (\mathbf{J} + i\mathbf{K}) , \qquad (81)$$

$$\mathbf{B} := \frac{1}{2} (\mathbf{J} - i\mathbf{K}) \ . \tag{82}$$

It is easy to see that commutation relations (78)-(80) are equivalent to

$$[A_i, A_j] = i\epsilon_{ijk}A_k , \qquad (83)$$

$$[B_i, B_j] = i\epsilon_{ijk}B_k , \qquad (84)$$

$$[A_i, B_j] = 0 . (85)$$

One finds matrices satisfying commutation rules (83)-(85) in the same way that one finds matrices representing the spins of a pair of uncoupled particles as direct sum. That is, let label the rows and columns of these matrices with a pair of integers and/or half-integers a, b, running over the values

$$a = -A, -A + 1, \dots, +A$$
, (86)

$$b = -B, -B + 1, \dots, +B$$
, (87)

and take

$$(\mathbf{A})_{a'b',ab} = \delta_{bb'} \mathbf{J}_{a'a}^{(A)} , \qquad (88)$$

$$(\mathbf{B})_{a'b',ab} = \delta_{aa'} \mathbf{J}_{b'b}^{(B)} , \qquad (89)$$

where $\mathbf{J}^{(A)}$ and $\mathbf{J}^{(B)}$ are the standard spin matrices for spins A and B

$$\left(J_3^{(A)}\right)_{a'a} = a\delta_{a'a} , \qquad (90)$$

$$\left(J_1^{(A)} \pm i J_2^{(A)}\right)_{a'a} = \delta_{a',a\pm 1} \sqrt{(A \mp a)(A \pm a + 1)} , \qquad (91)$$

and likewise for $\mathbf{J}^{(B)}$. The representation is labeled by the values of the positive integers and/or half-integers A and B. Therefore the (A, B) representation has dimensionality (2A + 1)(2B + 1).

As said before, **A** and **B** have to be Hermitian, and therefore **J** is Hermitian (as expected for the spin, which is an observable) but **K** is *anti-Hermitian*¹¹.

¹¹In the text of P. Ramond, "Field Theory: A Modern Primer", on page 8 after the formula (1.2.34) there is an error: the K_i 's are incorrectly carried as Hermitian generators. Indeed when Ramond constructs the one-to-one correspondence with $su(2) \oplus su(2)$ generators, this requirement makes N_i and N_i^{\dagger} to be not Hermitian, thus their eigenvalues are not n(n+1) and m(m+1). Furthermore in this way he would get finite-dimensional unitary irreps, even though it is forbidden by mathematical theorem. However it can be obtained infinite-dimensional unitary irreps: *e.g.* (48) is Hermitian. Note in formula (1.4.20) on page 16 that **K** is anti-Hermitian.

This is because of the i in equation (83) and (84), which is required by the sign minus in (80) in order to obtain such **A** and **B** satisfying the right algebra. Thus the finite-dimensional representations of Lorentz group are not unitary. This is a general result of group theory: simple non-compact Lie groups do not have any finite-dimensional non-trivial unitary irreducible representation. There is no problem working with non-unitary representations, because the objects one is now concerning with are fields, not states, and do not need to have a Lorentz-invariant positive norm.

In contrast the rotation group is represented unitarily, with its generators represented by Hermitian matrices

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \ . \tag{92}$$

This sum of generators **A** and **B** can be seen as the direct sum of the matrixvectors. Therefore the corresponding representation of the group can be seen as the direct product of two SU(2) representations, $D^{(j)}$. By Clebsch-Gordon decomposition one achieves

$$(A, B) = D^{(A)} \otimes D^{(B)} = \bigoplus_{j=|A-B|}^{A+B} D^{(j)}$$
 (93)

The field which transforms according to the (A, B) representation of the Lorentz group has components that rotate like objects of spin j, with

$$j = A + B, A + B - 1, \dots, |A - B|$$
 (94)

Furthermore, note that the product of two representations $(j_1, 0)$ and $(j_2, 0)$ is reducible and can be decomposed into the sum

$$(j_1, 0) \otimes (j_2, 0) = \bigoplus_{j=|j_1-j_2|}^{j_1+j_2} (j, 0) .$$
 (95)

Representations of the proper Lorentz group have been considered, thus, if one wants to include space inversion, there must be a matrix β which behaves such that

$$\beta \mathbf{J} \beta^{-1} = +\mathbf{J} , \qquad \beta \mathbf{K} \beta^{-1} = -\mathbf{K} , \qquad (96)$$

or, in terms of matrices (81) and (82)

$$\beta \mathbf{A} \beta^{-1} = \mathbf{B} , \qquad \qquad \beta \mathbf{B} \beta^{-1} = -\mathbf{A} .$$
 (97)

Thus an irreducible (A, B) representation of the proper Lorentz group does not provide a representation including space inversion unless A = B. It will be shown that (A, A) representations are the scalar, the vector and the symmetric traceless tensors. For $A \neq B$, the irreducible representation of Lorentz group including space inversion are the direct sums $(A, B) \oplus (B, A)$, of dimensionality 2(2A + 1)(2B + 1).

At this stage some (A, B)'s are going to be identified with the perhaps more familiar scalars, vectors, spinors and tensors.

Let start from the simplest one, the (0,0) representation. This corresponds to transformation

$$S_{\mu\nu} = 0 \tag{98}$$

that is, if $\phi(x)$ is the field transforming according to this representation,

$$\delta_0 \phi = -\frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} J_{\rho\sigma} \phi(x) = -\frac{i}{2} \epsilon^{\rho\sigma} L_{\rho\sigma} \phi(x) .$$
(99)

Therefore, under Lorentz transformations,

$$\phi'(x') = \phi(x) , \qquad (100)$$

which is a *scalar field* (it has the same value when measured in different inertial frames).

Consider now the most important representations of proper Lorentz group, that are the Weyl spinors (1/2, 0) and (0, 1/2). These are realized by twocomponent complex spinors. Let call conventionally $\psi_L(x)$, left-handed spinor, and $\psi_R(x)$, right-handed spinor, respectively. If one imposes that these fields satisfy Dirac-like equations, it simply turns out that they describe massless particles with helicity $\pm 1/2$. They are so important because, as it will be seen later, one is able to generate any other representation by opportunely multiplying them together. Write

$$\psi_L(x) \to \psi'_L(x') = \Lambda_L \psi_L(x) , \qquad (101)$$

$$\psi_R(x) \to \psi'_R(x') = \Lambda_R \psi_R(x) , \qquad (102)$$

where $\Lambda_{L,R}$ are 2×2 matrices with complex entries. When the transformation is a rotation, the form of $\Lambda_{L,R}$ is quite obvious from the spinor representation of SU(2):

$$\Lambda_{L,R} = e^{i(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\omega})/2} \quad (\text{rotation}) , \qquad (103)$$

where the ω_i 's are rotation parameters and the σ_i 's are the Hermitian 2 × 2 Pauli spin matrices. In other words, the rotation generators J^i are $\sigma^i/2$. Boosts cannot be represented unitarily. The representation

$$\mathbf{K} = -\frac{i}{2}\boldsymbol{\sigma} \tag{104}$$

satisfies all the required commutation relations. Therefore write

$$\Lambda_L = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\omega}-i\boldsymbol{\nu})/2} , \qquad (105)$$

where the ν^{i} 's are boost parameters. Since (1/2, 0) and (0, 1/2) representations are related by parity, construct Λ_R from Λ_L by changing the sign of boost parameters

$$\Lambda_R = e^{i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{\omega}+i\boldsymbol{\nu})/2} \ . \tag{106}$$

Note that Λ_L and Λ_R are related by

$$\Lambda_R = (\Lambda_L^{-1})^{\dagger} \ . \tag{107}$$

Let switch subject for few lines in order to present a very used notation. One already knows from representation theory of groups that, for a given group G, a *n*-dimensional representation r(G) is a set of $n \times n$ matrices acting on a vector space. Consider a vector v_a , with $a = 1, \ldots n$, this transforms under the action of any matrix $r(g)_{ab}$ like

$$v_a \to v'_a = r(g)_{ab} v_b . \tag{108}$$

Once this representation r(G) is given, one is able to construct other three ones: complex conjugated $r(G)^*$, inverse transposed $(r(G)^{-1})^T$ and inverse hermitian $(r(G)^{-1})^{\dagger}$. One is interested in the last one, as suggested by (107). Conventionally one may write $v_{\dot{a}}$ a vector of the space on which $(r(G)^{-1})^{\dagger}$ acts and its transformation

$$v_{\dot{a}} \to v'_{\dot{a}} = r(g)_{\dot{a}\dot{b}}v_{\dot{b}}$$
 (109)

Also note that, if r(G) is unitary, then there is no need for dotted indices, since the two representations are trivially equivalent. But this is not the case for representations of Lorentz group. Therefore, when spinor indices appear explicitly, they are written undotted (dotted) for (1/2, 0) ((0, 1/2))

$$\Lambda_L := \Lambda_{\alpha\beta} , \qquad (110)$$

$$\Lambda_R := \Lambda_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \ . \tag{111}$$

If parity is concerned, one has to consider the Dirac spinor representation $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$. The simplest way to realize it is

$$\Psi := \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_{\dot{a}} \end{pmatrix} , \qquad (112)$$

on which the operation of parity is well-defined:

$$P: \Psi \to \Psi^P = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi := \gamma_0 \Psi .$$
 (113)

One projects only the left and the right spinors by means of the projection operators

$$\frac{1}{2}(1\pm\gamma_5)$$
, (114)

where

$$\gamma_5 := \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix} \ . \tag{115}$$

Transformation properties are trivially

$$\Psi(x) \to S(\Lambda)\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Lambda_L \psi_L(x) \\ \Lambda_R \psi_R(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix} \Psi(x).$$
(116)

An alternative method to obtain this representation is based on Clifford's algebra, i.e. γ -matrix algebra

$$\{\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}_4 .$$
 (117)

Define

$$S_{\mu\nu} := \frac{i}{4} [\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] .$$
 (118)

The $S_{\mu\nu}$'s satisfy the correct algebra (75). Furthermore it is easy to show that

$$[\gamma^{\mu}, S^{\nu\rho}] = i(g^{\mu\nu}\gamma^{\rho} - g^{\mu\rho}\gamma^{\nu}).$$
(119)

or rather γ^{μ} behaves like a four-vector. Consider $A \in SL(2, \mathbb{C})$ and denote with S(A) its Dirac representation, latter property suggests that by exponentiation

$$S(A)^{-1}\gamma^{\mu}S(A) = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}(A)\gamma^{\nu} .$$
 (120)

Let define

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \frac{i}{4!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma , \qquad (121)$$

and verify

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$$
, $(\gamma^5)^2 = \mathbb{I}_4$. (122)

Then one introduces two projectors like before

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} \pm \gamma^5) , \qquad (123)$$

such that subspaces obtained by projection are invariant under the action of S(A)

$$S(A)\gamma^5 S(A)^{-1} = \det(S(A))\gamma^5 = \gamma^5$$
. (124)

Fields are four-component spinors $\Psi(x)$ obeying Dirac equation

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + m)\Psi(x) = 0 , \qquad (125)$$

which is covariant for the properties found above.

Consider now the representation $(1/2, 1/2) = (1/2, 0) \otimes (0, 1/2)$ and from decomposition (93) one knows that the field has components with j = 1, three-vector, and j = 0, scalar. Thus it describes a particle with spin-1. These fields can be represented by four-vectors

$$A^{\mu}(x) = (A^0, \mathbf{A}) , \qquad (126)$$

where A^0 and **A** are scalar and vector components respectively. It can be shown that

$$(S_{\rho\sigma})^{\ \nu}_{\mu} = i(g_{\rho\mu}g^{\nu}{}_{\sigma} - g_{\sigma\mu}g^{\nu}{}_{\rho}) \ . \tag{127}$$

Let us consider a similar case: $(1/2, 0) \otimes (1/2, 0) = (0, 0) \oplus (1, 0)$. The scalar representation is given by the antisymmetric product. The representation (1, 0) can be represented by an antisymmetric, self-dual second rank tensor, *i.e.* a tensor $F_{\mu\nu}$ which obeys

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} , \qquad (128)$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu}^{\ \rho\sigma} F_{\rho\sigma} \ . \tag{129}$$

Indeed the elements of $F_{\mu\nu}$ can be written as functions of the components of a three-vector $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ -F_1 & 0 & -iF_3 & iF_2 \\ -F_2 & iF_3 & 0 & -iF_1 \\ -F_3 & -iF_2 & iF_1 & 0 \end{pmatrix} .$$
(130)

Then the (0, 1) representation would correspond to a tensor that is antisymmetric and anti-self-dual

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} . \qquad (131)$$

A matrix form, equal up to some signs to (130), corresponds to anti-self-dual tensors. For example, Maxwell's field strength tensor $F_{\mu\nu}$ transforms under

Lorentz group as $(0, 1) \oplus (1, 0)$. However, it is only in four dimensions that an antisymmetric two-index tensor can be divided into such self-dual and anti-self-dual parts.

A general tensor of rank N transforms as the direct product of N four vector representations (1/2, 1/2). It can be decomposed into irreducible terms (A, B) with $A = N/2, N/2 - 1, \ldots$ and $B = N/2, N/2 - 1, \ldots$

General (A, A) fields contain terms with only integer spins $2A, 2A - 1, \ldots, 0$ and they can be represented as traceless symmetric tensor of rank 2A. Note in fact that the number of independent components of a symmetric traceless tensors of rank 2A in four dimensions is

$$(2A+1)^2 (132)$$

as expected for (A, A) fields.

It has been shown how to realize spin-0, 1/2 and 1 fields. Now let build two different spin-3/2 fields. The first procedure is to take the product of three (1/2, 0)

$$\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(\frac{1}{2},0\right)=\left(\frac{3}{2},0\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(\frac{1}{2},0\right)\ .$$
(133)

The spin-3/2 corresponds to the completely symmetric part of the product. Thus, a spin-3/2 field can be represented by a field totally symmetric in the interchange of its three L-like spinor indices. Its transformation properties are obtained by a suitable generalization of the action on one L-like index. To include parity, one has to combine left and right contributions

$$\left(\frac{3}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{3}{2}\right) . \tag{134}$$

A more convenient representation of spin-3/2 field is obtained through the product of a vector and a spinor

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \otimes \left[\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right)\right] = \left(1,\frac{1}{2}\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right) \oplus \left(\frac{1}{2},1\right) \oplus \left(\frac{1}{2},0\right) .$$
(135)

The corresponding field quantity has four-vector and spinor indices

$$\Psi^{\mu} = \begin{pmatrix} \psi^{\mu}_L \\ \psi^{\mu}_R \end{pmatrix} , \qquad (136)$$

which is the *Rarita-Schwinger* field when one projects out the extra $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ components imposing Lorentz invariant condition

$$\gamma^{\mu}\Psi_{\mu} = 0 . \qquad (137)$$

According to the (93), such a field transforms under ordinary rotations as a direct sum of two j = 3/2 and two j = 1/2 components. The doubling is eliminated by imposing the Dirac equation $(\gamma^{\nu}\partial_{\nu} + m)\Psi^{\mu} = 0$ and the remaining j = 1/2 component is eliminated by requiring that

$$\partial_{\mu}\Psi^{\mu} = 0 . (138)$$

With these conditions the field describes a single particle of spin j = 3/2. The last considered example is that of spin-2 fields. Again there are many possible ways to describe a spin-2 field: (2,0), (0,2), (1,1). Let choose the latter for our brief discussion. It appears in the product

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \otimes \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left[(0, 0) \oplus (1, 1)\right]_s \oplus \left[(0, 1) \oplus (1, 0)\right]_a , \qquad (139)$$

where s and a denote the symmetric and antisymmetric parts. Thus spin-2 field can be described by a second rank symmetric tensor $h_{\mu\nu}(x)$. The scalar component corresponds to its trace which can be subtracted by the traceless condition

$$g^{\mu\nu}h_{\mu\nu}(x) = 0.$$
 (140)

Finally let discuss one of the possible ways to realize fields transforming according to (A, B). The following construction has been shown in previous examples for particular cases and it is going to be generalized. Define symmetric product \odot of representations as the symmetric part of a tensor product \otimes . Thus one can write

$$(A,B) = \underbrace{\left(\frac{1}{2},0\right) \odot \cdots \odot \left(\frac{1}{2},0\right)}_{A \text{ times}} \otimes \underbrace{\left(0,\frac{1}{2}\right) \odot \cdots \odot \left(0,\frac{1}{2}\right)}_{B \text{ times}} .$$
 (141)

Therefore this type of fields has 2A undotted indices and 2B dotted indices

$$\psi_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2A};\dot{\alpha}_1,\dots,\dot{\alpha}_{2B}}(x) , \qquad (142)$$

and remains unchanged as a result of mutual permutations of indices both within the family $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2A}$ and within the family $\dot{\alpha}_1, \ldots, \dot{\alpha}_{2B}$. It transforms like

$$\psi'_{\alpha_1,\dots,\alpha_{2A};\dot{\alpha}_1,\dots,\dot{\alpha}_{2B}}(x') = \Lambda_{\alpha_1\beta_1}\dots\Lambda_{\alpha_{2A}\beta_{2A}}\Lambda_{\dot{\alpha}_1\dot{\beta}_1}\dots\Lambda_{\dot{\alpha}_{2B}\dot{\beta}_{2B}}\psi_{\beta_1,\dots,\beta_{2A};\dot{\beta}_1,\dots,\dot{\beta}_{2B}}(x)$$

The same result reached in an alternative way can be found in L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Non Relativistic Theory*, in §57. An alternative way to construct quantum field operators which transform like (A, B), starting from the expression of operators in free theory and requiring causal conditions, can be found in S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume I*, in chapter 5. Weinberg shows the close relation between commutation rules of the field and spin associated to the representation (A, B). He also treats the most general form of PCT theorem and the differences between massless and massive particles.

Other good references are the chapter 1 of Ramond's book and R. Slansky, *Group theory for unified model building*: both texts show how to realize Lorentz invariants starting from the fields presented before, in particular they pay much attention in the construction of real scalar invariants, because the Lagragian density of a chosen theory is so.

Commento sull'inversione temporale

L'operatore di inversione temporale T è antiunitario, quindi soddisfa la stessa relazione di un operatore unitario, $T^{\dagger}T = TT^{\dagger} = I$, ma è antilineare. Un tale operatore è rappresentabile nella forma VU, dove U è un operatore unitario e V denota l'operazione di coniugazione complessa. Mentre per un operatore lineare L si ha

$$\langle \psi | L | \phi \rangle = \langle \psi | L \phi \rangle = \langle L^+ \psi | \phi \rangle ,$$

quindi

$$\langle \psi | L = \langle L^+ \psi | ,$$

nel caso di un operatore antilineare A si ha

$$\langle \psi | A \neq \langle A^+ \psi |$$
.

In particolare,

$$A(\alpha|\psi\rangle + \beta|\phi\rangle) = \alpha^* A|\psi\rangle + \beta^* A|\phi\rangle ,$$

implica

$$\langle \psi | A | \phi \rangle = \langle \psi | A \phi \rangle = \langle A^+ \psi | \phi \rangle^*$$

Questa relazione è utilizzata nella (3-191), pag. 155 del testo di Itzykson-Zuber.

Rappresentazione di Källen-Lehmann

Cominciamo con il considerare le seguenti quantità nel minkowskiano

$$G^{(2)}(x-y) = \langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle ,$$

$$W^{(2)}(x-y) = \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle ,$$

$$G^{(2)}_{R}(x-y) = \theta(x^{0}-y^{0}) \langle \Omega | \phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle .$$
(143)

 $G^{(2)}(x-y)$ è il propagatore esatto, $W^{(2)}(x-y)$ la funzione di Wightman, mentre $G_R^{(2)}(x-y)$ è la funzione di Green ritardata. Nel caso della teoria libera $-iG^{(2)}(x-y)$ è il propagatore di Feynman. La funzione di Wightman nel caso di teoria libera è

$$W_0^{(2)}(p) = 2\pi\theta(p^0)\delta(p^2 - m^2)$$

Nel caso di teoria interagente si ha

$$W^{(2)}(x-y) = \sum_{n} \langle \Omega | \phi(x) | n \rangle \langle n | \phi(y) | \Omega \rangle$$

=
$$\sum_{n} e^{-ip_n(x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2$$

=
$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} (2\pi)^4 \sum_{n} \delta(p-p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2 , (144)$$

dove abbiamo usato $P^{\mu}|\Omega\rangle = 0$, $P^{\mu}|n\rangle = p_n^{\mu}|n\rangle$ e inserito un set completo di stati $|n\rangle$. Si noti che stiamo considerando proprietà esatte della teoria, quindi non di tipo perturbativo. In particolare, l'insieme di stati $\{|n\rangle\}$ rappresenta stati fisici, e quindi on-shell. Tale insieme include il vuoto e stati sia ad una particella che a più particelle. Per ogni k, l'insieme di stati a k-particelle è rappresentato da un sottospazio dello spazio di Hilbert della teoria. In proposito si noti che la somma su n è schematica, ed include integrali sui momenti relativi. Di seguito assumiamo che non vi sia il contributo di vuoto, cioè $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$, cosa che è sempre possibile imporre tramite uno shift di ϕ . Per semplificazione, assumiamo anche che non vi siano stati legati. Per esempio, nel caso di un sistema di due particelle, questo avrebbe energia minore di $m_1 + m_2$ e l'analisi andrebbe modificata.

L'implicita assunzione dell'unicità e stabilità del vuoto, insieme a $P^0|\Omega\rangle = 0$, implicano che gli stati $|n\rangle$ hanno energia positiva eccetto quando $|n\rangle = |\Omega\rangle$. Il caso $E_n = 0$, per $|n\rangle \neq |\Omega\rangle$, è escluso dal fatto che $|\Omega\rangle$ è l'unico stato con energia nulla, mentre l'esistenza di E_n negativi implicherebbe che $|\Omega\rangle$ non è lo stato fondamentale e quindi non sarebbe stabile. Questo implica che $\delta(p - p_n)$ si annulla per $p^0 < 0$. Ciò suggerisce l'introduzione di un fattore $\theta(p^0)$, definendo la distribuzione $\rho(p^2)$ tramite la relazione

$$(2\pi)\theta(p^0)\rho(p^2) = (2\pi)^4 \sum_n \delta(p-p_n) |\langle \Omega | \phi(0) | n \rangle|^2 ,$$

dove la dipendenza da p^2 è una conseguenza dell'invarianza di Lorentz. Poiché gli stati $|n\rangle$ sono fisici, e p_n^2 è il quadrato della massa totale invariante, si ha che, supponendo $m \neq 0$, $p_n^2 > 0$, eccetto nel caso in cui $|n\rangle$ corrisponda allo stato fondamentale, per il quale si ha $p_n^2 = 0$. Segue che i valori di p_{μ} tali per cui $p^2 < 0$, non corrispondono mai a zeri dell'argomento di $\delta(p - p_n)$. Quindi $\delta(p - p_n) = 0$ per $p^2 < 0$, da cui $\rho(p^2) = 0$ quando $p^2 < 0$. Da quanto detto

segue

$$W^{(2)}(p) = 2\pi\theta(p^{0})\rho(p^{2})$$

= $\int_{0}^{\infty} d\mu^{2}2\pi\delta(p^{2}-\mu^{2})\theta(p^{0})\rho(\mu^{2})$
= $\int_{0}^{\infty} d\mu^{2}\rho(\mu^{2})W_{0}^{(2)}(p;\mu^{2})$. (145)

Consideriamo il caso generale in cui la lagrangiana ha più campi scalari, ognuno con masse diverse. Si ha

$$\sum_{\text{stati singola particella}} = \sum_{j} \int \frac{d^{3}k}{(2\pi)^{3}} \frac{1}{\omega_{k,j}}$$
$$= \sum_{j} \int \frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}} 2\pi \delta(k^{2} - m_{j}^{2}) , \qquad (146)$$

dove j indicizza le specie di particelle e

$$\omega_{k,j} = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m_j^2} \; .$$

Nel caso di stati a più particelle si ha un continuum di valori di ω . Per esempio, per uno stato a due particelle

$$\omega = \sqrt{\mathbf{k}_1^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{k}_2^2 + m_2^2} \; .$$

Poiché $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, segue che nel caso $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$, ω prende valori con continuità che iniziano con $m_1 + m_2$ e con k^2 che assume, come valore più basso, $(m_1 + m_2)^2$. Si ha quindi

$$(2\pi)\theta(p^{0})\rho(p^{2}) = \sum_{j} \int \frac{d^{4}k}{(2\pi)^{4}} 2\pi\delta(k^{2} - m_{j}^{2})\theta(k^{0})(2\pi)^{4}\delta(p-k)|\langle\Omega|\phi(0)|k,j\rangle|^{2} + 2\pi\theta(p^{0})\sigma(p^{2}) ,$$

(147)

dove $2\pi\theta(p^0)\sigma(p^2)$ denota il contributo degli stati a più particelle. Possiamo esprimere ρ nella forma

$$\rho(p^2) = \sigma(p^2) + \sum_j \delta(p^2 + m_j^2) Z_j ,$$

$$Z_j := |\langle \Omega | \phi(0) | k, j
angle|^2$$
 .

Poiché Z_j è uno scalare di Lorentz, questo dipende solamente da $m_j^2 = k^2$ e non da k. Si noti inoltre che $\sigma(p^2)$ è nulla per $p^2 < 4m_1^2$, dove m_1 è la più piccola massa di una singola particella. Da quanto detto segue che

$$G^{(2)}(p) = \sum_{j} \frac{iZ_{j}}{p^{2} - m_{j}^{2} + i\epsilon} + \int_{4m_{1}^{2}}^{\infty} d\mu^{2}\sigma(\mu^{2})\frac{i}{p^{2} - \mu^{2} + i\epsilon}$$

 $G^{(2)}(p)$ è ottenibile dalla funzione di variabile complessa

$$\Gamma[s] := \sum_{j} \frac{iZ_{j}}{s - m_{j}^{2}} + \int_{4m_{1}^{2}}^{\infty} d\mu^{2} \sigma(\mu^{2}) \frac{i}{s - \mu^{2}} ,$$

avvicinandosi da sopra l'asse reale del piano complesso s

$$G^{(2)}(p) = \Gamma(s = p^2 + i\epsilon) .$$

 $\Gamma[s]$ ha poli per $s=m_j^2$ e un taglio sull'asse reale da $4m_1^2$ a
 $\infty,$ con discontinuità

$$\Gamma(r+i\epsilon) - \Gamma(r-i\epsilon) = 2\pi\sigma(r)$$
.

Consideriamo ora il caso di un singolo campo scalare, con un potenziale $V(\phi, \lambda)$ che si annulli per $\lambda = 0$. Nel caso $\lambda = 0$ si ha

$$G^{(2)}(p) = \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} ,$$

dove abbiamo denotato con m_0 la massa nella lagrangiana iniziale. Nel caso $\lambda \neq 0$, si ha

$$G^{(2)}(p) = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{4m^2}^{\infty} d\mu^2 \sigma(\mu^2) \frac{i}{p^2 - \mu^2 + i\epsilon} .$$

Se $m^2 \neq m_0^2$, si ha rinormalizzazione della massa. Se $Z \neq 1$, allora si ha una rinormalizzazione di ϕ , cosicché $|\langle \Omega | \phi_{\text{phys}}(0) | k \rangle|^2 = 1$, dove

$$\phi_{\mathrm phys} := \sqrt{Z}\phi$$
 .

Questi aspetti non hanno nulla a che vedere con le divergenze ultraviolette. Infatti si riferiscono alla teoria esatta, così, per esempio la Z non va confusa con la Z della rinormalizzazione perturbativa, come evidente dal fatto che nel caso presente Z non è divergente. Sull'articolo di Dirac dove è formulato per la prima volta il path integral

L'argomento di Dirac inizia con l'osservazione che la trasformazione canonica $(q, p) \longrightarrow (Q, P)$, generata dalla funzione principale di Hamilton S(q, Q, t), considera $q \in Q$ come variabili indipendenti. L'idea è introdurre l'analoga trasformazione in meccanica quantistica e identificare una versione quantistica, quindi operatoriale, delle relazioni classiche

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$
, $P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$

A tal fine Dirac introduce una rappresentazione delle coordinate $|Q\rangle$, "indipendente" da $|q\rangle$. Questo porta naturalmente a considerare gli elementi di matrice "mixed" $\langle q|Q\rangle$.

Nel testo di Ramond ci sono delle imprecisioni che è utile discutere. Nell'eq.(2.1.36) Ramond utilizza l'identificazione

$$\hat{p}|q\rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q}|q\rangle . \qquad (148)$$

È necessario prestare attenzione nel descrivere l'azione di un dato operatore sui bra e i ket. Mentre la determinazione di tale azione è immediata nel caso lo stato sia descritto dalla grandezza fisica corrispondente, come, per esempio, $\hat{p}|p'\rangle = p'|p'\rangle \in \hat{q}|q'\rangle = q'|q'\rangle$, la relazione $\hat{p}\psi(q,t) = -\frac{i}{\hbar}\partial_q\psi(q,t)$, non implica la (148). Come vedremo, la versione corretta della (148) ha il secondo membro con il segno opposto. In questo contesto è utile osservare che si può consistentemente porre

$$H(\hat{p}, \hat{q}, t) |\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle .$$
(149)

In proposito, si ricordi che in meccanica quantistica t è un parametro, mentre q è un operatore (in teoria dei campi quantistici sia q che t sono parametri). La (149) può esser vista come l'equazione di Schrödinger espressa senza scelta di una base (o rappresentazione). Si veda, per esempio, la sezione 1.4.5, del testo di Kleinert, "*Particles and Quantum Fields*", World Scientific, 2016.¹² Si può anche porre

$$\langle q|\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q} \langle q| , \qquad (150)$$

¹²I testi di Kleinert di teoria dei campi sono di particolare utilità. Per esempio, il testo citato riporta, nelle sezioni 7.17 e 7.18, un'analisi dettagliata e molto ben fatta del teorema di Wick. Un altro utile riferimento riguarda "*Critical properties of* $\lambda \phi^4$ -theories", disponibile at http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/kleiner_reb8/psfiles/phi4.pdf.

е

$$\langle q'|\hat{q} = q'\langle q'|$$
.

Ciò è conseguenza della relazione

$$\psi_s(q) = \langle q | s \rangle$$
.

Essendo $\langle q|\psi(t)\rangle=\psi(q,t),$ l'usuale forma differenziale dell'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi(q,t) = H(-i\hbar\partial_q,q,t)\psi(x,t) ,$$

segue dall'Eq.(149)

$$\langle q|H(\hat{p},\hat{q},t)|\psi(t)\rangle = H(-i\hbar\partial_q,q,t)\langle q|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\langle q|\psi(t)\rangle \ .$$

Per verificare che la relazione (148) non ha il segno corretto, si osservi che essendo $\langle p|q\rangle = \bar{\psi}_p(q) = e^{-\frac{i}{\hbar}pq}/\sqrt{2\pi}$, segue che la relazione

$$\frac{\partial}{\partial q}|q\rangle = \lim_{a \to 0} \frac{|q+a\rangle - |q\rangle}{a} ,$$

implica

$$\lim_{a \to 0} \langle p | \frac{|q+a\rangle - |q\rangle}{a} = \partial_q \bar{\psi}_p(q) = -\frac{i}{\hbar} p \bar{\psi}_p(q) \; .$$

Quindi la (148) implicherebbe

$$\langle p'|\hat{p}|q\rangle = \langle p'| - i\hbar \frac{\partial}{\partial q}|q\rangle = -p'\langle p|q\rangle ,$$

che ha il segno opposto della corretta

$$\langle p'|\hat{p}|q\rangle = \langle p'|p'|q\rangle = p'\langle p'|q\rangle$$

Per ulteriori osservazioni può essere utile l'articolo https://arxiv.org/pdf/ quant-ph/9907069.pdf e gli articoli 3, 4, 5, 26 nella bibliografia. Un altro ottimo articolo è: H. Bergeron, "*Rigorous bra-ket formalism and wave function operator for one particle quantum mechanics*", Journal of Math. Phys. 47 (2006) 022105. Si veda anche la discussione at

http://math.stackexchange.com/questions/366795/derivative-of-a-bra? lq=1

Quanto detto spiega la discrepanza tra i segni di (2.1.37) e (2.1.38) nel testo di Ramond e le equazioni (3) e (5) nell'articolo originale di Dirac (la cui

lettura è vivamente raccomandata). Di seguito mostriamo il metodo usato da Dirac per derivare (3) e (5). Dirac considera

$$\langle q'|\hat{O}|Q'\rangle = \int dq''\langle q'|\hat{O}|q''\rangle\langle q''|Q'\rangle = \int dQ''\langle q'|Q''\rangle\langle Q''|\hat{O}|Q'\rangle .$$
(151)

Si osservi che proiettando la relazione

$$\hat{O}|s\rangle = |s'\rangle$$
,

sulla base $\{|q\rangle\}$, si ha

$$\int dq' \langle q | \hat{O} | q' \rangle \langle q' | s \rangle = \langle q | s' \rangle ,$$

che riscriviamo nella forma

$$\int dq' \langle q | \hat{O} | q' \rangle \psi_s(q') = \psi_{s'}(q) \; .$$

Confrontando tale espressione con quella dell'azione dell'operatore \hat{O}_q che agisce sullo spazio delle configurazioni associato all'osservabile O

$$\hat{O}_q \psi_s(q) = \psi_{s'}(q) \; ,$$

si ha

$$\langle q|\hat{O}|q'\rangle = \hat{O}'_{q'}\delta(q-q') , \qquad (152)$$

dove $\hat{O}'_{q'}\delta(q-q')$ è la distribuzione tale che, per ogni funzione di test f nello spazio di Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, si abbia

$$\int dq' \hat{O}'_{q'} \delta(q-q') f(q') = \int dq' \delta(q-q') \hat{O}_{q'} f(q') .$$

Così, ricordando che

$$\int dq' \partial_{q'}^n \delta(q-q') f(q') = (-1)^n \partial_q^n f(q) ,$$

si ha che se

$$\hat{O}_q = \sum_{k \ge 0} f_k(q) \partial_q^k \; ,$$

allora,

$$\hat{O}'_q = \sum_{k \ge 0} (-1)^k f_k(q) \partial_q^k \; .$$

In particolare,

$$\langle q|\hat{p}|q'\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial q'}\delta(q-q') \;.$$
 (153)

Riassumendo, si ha

$$\langle q|\hat{p} = -i\hbar\partial_q\langle q| , \qquad \hat{p}|q'\rangle = i\hbar\partial_{q'}|q'\rangle ,$$

da cui

$$\langle q|\hat{p}|q'\rangle = -i\hbar\partial_q\delta(q-q') = i\hbar\partial_{q'}\delta(q-q') \;.$$

Quindi,

$$\int dq \langle q|\hat{p}|q'\rangle f(q) = -i\hbar\partial_{q'}f(q') , \qquad \int dq' \langle q|\hat{p}|q'\rangle f(q') = i\hbar\partial_q f(q) .$$

Nel caso

$$\langle s|\hat{O}=\langle s'|$$
,

si ha

$$\int dq' \langle s | q' \rangle \langle q' | \hat{O} | q \rangle = \langle s' | q \rangle ,$$

equivalente a

$$\int dq' \bar{\psi}_s(q') \langle q' | \hat{O} | q \rangle = \bar{\psi}_{s'}(q) ,$$

che, confrontato con

$$\hat{O}_q \bar{\psi}_s(q) = \bar{\psi}_{s'}(q) \; ,$$

implica

$$\langle q'|\hat{O}|q\rangle = \bar{\hat{O}}'_{q'}\delta(q-q') , \qquad (154)$$

dove $\hat{O}'_{q'}\delta(q-q')$ è la distribuzione tale che, per ogni $f\in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si abbia

$$\int dq' \bar{\hat{O}}_{q'} \delta(q-q') f(q') = \int dq' \delta(q-q') \bar{\hat{O}}_{q'} f(q')$$

Quindi, se

$$\hat{O}_q = \sum_{k \ge 0} f_k(q) \partial_q^k \; ,$$

allora,

$$\bar{\hat{O}}'_q = \sum_{k \ge 0} (-1)^k \bar{f}_k(q) \partial_q^k \; .$$

Si noti che tale risultato era ovvio a priori, visto che $\bar{\hat{O}}'_{q'}$ è il complesso coniugato di $\hat{O}'_{q'}$.

A proposito dell'utilizzo della delta di Dirac è necessario prestare attenzione al fatto che questa va considerata nel senso delle distribuzioni. In particolare, va precisato se la derivata della delta è presa rispetto alla variabile su cui si integra o rispetto al punto rispetto al quale è centrata. In proposito, si ha

$$\int dy f(y) \frac{d^k}{dy^k} \delta(x-y) = (-1)^k \int dy \delta(x-y) \frac{d^k}{dy^k} f(y) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) ,$$
$$\int dy f(y) \frac{d^k}{dx^k} \delta(x-y) = \frac{d^k}{dx^k} \int dy \delta(x-y) f(y) = \frac{d^k}{dx^k} f(x) .$$

Analogamente, la determinazione di α nelle relazioni $\partial_x^k \delta(x-y) = \alpha \delta(x-y)\partial_x^k$, $\partial_y^k \delta(x-y) = \alpha \delta(x-y)\partial_y^k$, dipende dal contesto. Dalle relazioni (151) e (153) segue

$$\langle q'|\hat{p}|Q'\rangle = \int dq'' \langle q'|\hat{p}|q''\rangle \langle q''|Q'\rangle$$
$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial q'} \langle q'|Q'\rangle . \qquad (155)$$

Il calcolo nel caso di $\langle q' | \hat{P} | Q' \rangle$ è simile. Grazie alla (154) si ha

$$\langle q'|\hat{P}|Q'\rangle = \int dQ'' \langle q'|Q''\rangle \langle Q''|\hat{P}|Q'\rangle$$
$$= i\hbar \frac{\partial}{\partial Q'} \langle q'|Q'\rangle . \qquad (156)$$

I segni nei secondi membri delle equazioni (2.1.37) e (2.1.38) nel testo di Ramond, opposti a quelli corretti di Dirac, sono bilanciati dal segno meno nella posizione $\langle q|Q\rangle = e^{-i/\hbar G(q,Q)}$ considerata da Ramond. D'altronde, utilizzando la "corrispondenza", $\langle q|Q\rangle$ con $e^{i/\hbar \int_T^t dt' L}$, i segni opposti di Ramond si evidenziano con il fatto che l'analogo quantistico delle relazioni

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}$$
, $P = -\frac{\partial S}{\partial Q}$,

avrebbero anch'esse, a differenza di quanto ottenuto da Dirac, i segni opposti. La "corrispondenza" tra $\langle q|Q \rangle$ e $e^{i/\hbar \int_T^t dt'L}$ è giustificata da Dirac con la seguente osservazione:

"The equations of motion of the classical theory cause the dynamical variables to vary in such a way that their values q_t , p_t at any time t are connected with their values q_T , p_T at any other time T by a contact transformation,

which may be put into the form (1) with $q, p = q_t, p_t; Q, P = q_T, p_T$ and S equal to the time integral of the Lagrangian over the range T to t. In the quantum theory the q_t, p_t will still be connected with the q_T, p_T by a contact transformation and there will be a transformation function $(q_t|q_T)$ connecting the two representations in which the q_t and the q_T are diagonal respectively."

Data un'osservabile O e il corrispondente operatore \hat{O} , parlare di rappresentazione diagonale (di \hat{O}) significa considerare una base $\{|o\rangle\}$ tale per cui per ogni elemento $|o'\rangle \in \{|o\rangle\}$, si ha

$$\hat{O}|o'\rangle = o'|o'\rangle$$
.

Di seguito mostriamo che l'argomento di Dirac è legato alla rappresentazione di Heisenberg degli operatori. Consideriamo di nuovo, cambiando leggermente la notazione, l'ampiezza di probabilità che una particella che sia nella posizione q' al tempo t', si trovi, al tempo t'', nel punto q''. Denotiamo con \hat{Q} l'operatore di posizione. Sia lo stato iniziale che quello finale sono autostati di \hat{Q}

$$\hat{Q}|q'\rangle = q'|q'\rangle , \qquad \hat{Q}|q''\rangle = q''|q''\rangle .$$
 (157)

Si ricordi che l'evoluzione temporale di uno stato è data da

$$|\psi(t'')\rangle = U(t'',t')|\psi(t')\rangle ,$$

dove

$$U(t'',t') = T \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t''} dt H(t)\right) \,,$$

dove T è l'operatore di ordinamento temporale. Nel caso in cui H non sia esplicitamente dipendente dal tempo, si ha

$$U(t'', t') = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}$$

Si consideri l'ampiezza

$$\langle q''|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|q'\rangle$$
.

Utilizziamo la notazione

 $|o,t\rangle$, (158)

per descrivere una particella che al tempo t si trova in uno stato corrispondente al valore o dell'osservabile O. Si noti che $|o, t\rangle$ non è il ket evoluto temporale di $|o\rangle$. In altre parole, mentre si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\psi(t_0)\rangle ,$$

è chiaro che

$$|o,t\rangle \neq e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|o\rangle$$
 . (159)

Infatti, lo stato descritto da $e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|o\rangle$ corrisponde all'evoluzione temporale di uno stato che al tempo t = 0 si trova nell'autostato dell'operatore \hat{O} con autovalore o, ben diverso dallo stato (158).

Nel seguito assumiamo che $\langle o'', t'' | o', t' \rangle$ sia l'ampiezza di probabilità $\langle o'' | \psi(t'') \rangle$ che lo stato $|\psi(t')\rangle$ evolva, al tempo t'', in $|o''\rangle$. Ciò non è a priori del tutto ovvio. Infatti la struttura di $\langle o'', t'' | o', t' \rangle$ rappresenta un prodotto scalare. Si potrebbe quindi considerare

$$\langle o'', t''|o', t'\rangle = \int dq \langle o'', t''|q \rangle \langle q|o', t'\rangle = \int dq \bar{\psi}_{o'', t''}(q) \psi_{o', t'}(q) .$$
(160)

La questione è capire a cosa corrisponda $\psi_{o,t}(q) = \langle q | o, t \rangle$. D'altronde, l'interpretazione di $\langle o'', t'' | o', t' \rangle$ implica che quest'ampiezza è riscrivibile nella forma

$$\int dq \bar{\psi}_{o''}(q) e^{-\frac{i}{\hbar} H(t''-t')} \psi_{o'}(q) , \qquad (161)$$

dove $\psi_{o'}(q)$ ($\psi_{o''}(q)$) è l'autofunzione, in rappresentazione delle coordinate, dell'operatore \hat{O} con autovalore o' (o''). Si osservi che mentre (160) utilizza un'interpretazione simmetrica per i due stati, $|o', t'\rangle \in |o'', t''\rangle$ in $\langle o'', t''|o', t'\rangle$, nel caso di (161) si interpreta lo stato $\psi_{o'}(q)$ come lo stato effettivamente corrispondente allo stato iniziale e di cui se ne considera l'evoluzione temporale agendo con l'operatore $\exp[-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')]$. Per mantenere un'interpretazione simmetrica è necessario ipotizzare un elemento comune ai due stati. Ciò è anche suggerito dal fatto che l'ampiezza richiesta sia uguale alla complessa coniugata dell'ampiezza di probabilità che uno stato che al tempo t'' sia $|o''\rangle$, evolva al tempo t' nello stato $|o'\rangle$, aspetto connesso con il time reversal. Come vedremo la (161) implica l'utilizzo della rappresentazione di Heisenberg, che infatti è definita rispetto ad un tempo di riferimento.

Il fatto che al tempo t' lo stato sia $|o'\rangle$, vuol dire che in rappresentazione di Schrödinger si ha $|\psi(t')\rangle = |o'\rangle$. Poiché

$$|\psi(t'')\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|\psi(t')\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|o'\rangle ,$$

si ha

$$\langle o'', t''|o', t'\rangle = \langle o''|\psi(t'')\rangle = \langle o''|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|o'\rangle ,$$

che implica

$$|o,t\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|o\rangle , \qquad (162)$$

dove t_0 è arbitrario. Si ricordi che uno stato in rappresentazione di Heisenberg, $|\psi_H\rangle$, è legato, per ogni t, alla rappresentazione di Schrödinger dalla relazione

$$|\psi_H\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(t)\rangle , \qquad (163)$$

che è un ket che non varia al variare di t. Inoltre, gli operatori in rappresentazione di Heisenberg sono legati a quelli in rappresentazione di Schrödinger dalla relazione

$$\hat{O}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\hat{O}e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}$$

Ciò implica che se $\hat{O}|o\rangle = o|o\rangle$, allora

$$\hat{O}_H(t)|o,t\rangle = o|o,t\rangle$$
.

Da quanto detto, è possibile identificare, per ogni t, il ket $|o, t\rangle$ con $|\psi(t_0)\rangle$. In tal caso $|o, t\rangle$ è il ket in rappresentazione di Heisenberg $|\psi_H\rangle$ e corrisponde all'autostato istantaneo di $\hat{O}_H(t)$ con autovalore o. In rappresentazione di Schrödinger lo stato corrisponde a $|\psi(t)\rangle = |o\rangle$ e l'operatore corrispondente è \hat{O} , cosicché $\hat{O}|\psi(t)\rangle = o|\psi(t)\rangle$. Questa osservazione evidenzia l'ovvio fatto che $|\psi_H\rangle$ dipende dal tempo di riferimento scelto. Per esempio, (163) identifica $|\psi_H\rangle$ con $|\psi(0)\rangle$. In questo senso, più che independenza dal tempo degli stati in rappresentazione di Heisenberg, si tratta della loro invarianza con l'evolvere del tempo. Una notazione più accurata è

$$|\psi_H(t_0)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|\psi(t)\rangle = |\psi(t_0)\rangle ,$$

che ha il pregio di evidenziare che la relazione tra gli stati in rappresentazione di Heisenberg con due diverse scelte del tempo di riferimento è identica alla relazione tra due stati in rappresentazione di Schrödinger, cioè

$$|\psi_H(t_2)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_2)}|\psi_H(t_1)\rangle$$
, $|\psi(t_2)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t_1-t_2)}|\psi(t_1)\rangle$.

Si è quindi visto che l'ampiezza $\langle o'', t'' | o', t' \rangle$ è esprimibile in rappresentazione di Heisenberg rispetto a qualsiasi scelta del tempo di riferimento, cioè, se $|\psi'_H(t_i)\rangle \in |\psi''_H(t_i)\rangle$ sono le rappresentazioni di Heisenberg associate a, rispettivamente, $|\psi'(t_i)\rangle \in |\psi''(t_i)\rangle$, allora $\langle \psi''_H(t_2) | \psi'_H(t_2) \rangle = \langle \psi''_H(t_1) | \psi'_H(t_1) \rangle$.

La precedente analisi ha quindi mostrato che ponendo

$$|o',t'\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t'-t_0)}|o'\rangle , \qquad |o'',t''\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t''-t_0)}|o''\rangle ,$$

si ha che l'ampiezza di probabilità che uno stato che al tempo t' è autostato di \hat{O} con autovalore o' si trovi, al tempo t'', nell'autostato $|o''\rangle$, cioè

$$\langle o''|e^{-\frac{i}{\hbar}H(t''-t')}|o'\rangle$$
,

coincide con il seguente prodotto scalare

$$\langle o'', t'' | o', t' \rangle$$
,

tra stati in rappresentazione di Heisenberg. In particolare, la versione corretta della (160) non è altro che

$$\langle o'', t''|o', t'\rangle = \int dq \langle o'', t''|q \rangle \langle q|o', t'\rangle = \int dq \bar{\psi}_{H\,o''}(t'' - t_0; q) \psi_{H\,o'}(t' - t_0; q) ,$$
(164)

dove

$$\psi_{Ho}(t-t_0;q) = \langle q|e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}|o\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}\langle q|o\rangle ,$$

è lo stato in rappresentazione di Heisenberg con tempo di riferimento $t - t_0$. Ciò evidenzia l'eleganza della rappresentazione di Heisenberg. In proposito si noti che l'esplicita selezione dello stato $|o', t'\rangle$ come stato effettivamente realizzato al tempo t', utilizzato nella descrizione di $\langle o'', t''|o', t'\rangle$, viene meno nell'interpretazione come prodotto scalare tra gli autostati di $\hat{O}_H(t')$ e $\hat{O}_H(t'')$.

Da quanto detto segue che l'affermazione di Dirac

"... transformation function $(q_t|q_T)$ connecting the two representations in which the q_t and the q_T are diagonal respectively"

può essere completata osservando che $\hat{Q}_H(t)$ $(\hat{Q}_H(T))$ è l'operatore associato alla base in cui q_t (q_T) è diagonale. Più precisamente, nella notazione di Dirac e Ramond, dove $|q_t\rangle := |q,t\rangle$ e $|q_T\rangle := |Q,T\rangle$, si ha $\hat{Q}_H(t)|q_t\rangle = q|q_t\rangle$ e $\hat{Q}_H(T)|q_T\rangle = Q|q_T\rangle$.

Un altro punto riguarda il "well-ordered" menzionato da Ramond. Nella seconda edizione, Ramond ha aggiunto il commento

"Well-ordered means that they are separable as a function of \hat{q} times a function of \hat{Q} ."

In realtà il concetto è generalizzabile. Infatti, secondo Dirac: $F(\hat{q}, \hat{Q})$ si intende ben ordinata se è la somma di prodotti di funzioni di \hat{q} per funzioni di \hat{Q} , cioè

$$F(\hat{q}, \hat{Q}) = \sum_{k} f_k(\hat{q}) g_k(\hat{Q}) \; .$$

In tal modo, utilizzando $\langle q|f(\hat{q}) = \langle q|f(q) \in g(\hat{Q})|Q \rangle = g(Q)|Q \rangle$, si ha

$$\langle q|F(\hat{q},\hat{Q})|Q\rangle = F(\hat{q},\hat{Q})\langle q|Q\rangle$$

Nell'articolo di Dirac sono descritti tutti i passaggi della formulazione path integral, ben più di quelli che il testo di Ramond gli attribuisce. Dopo la (2.2.1) del Ramond, cioè

$$\langle q'_t | q_T \rangle \sim e^{\frac{i}{\hbar} \int_T^t dt L} ,$$
 (165)

è scritto

"Let me emphasize that the ~ sign means just a loose connection, because to arrive at (2.1.44) Dirac had to make all kinds of assumptions with no way to justify them. In fact, we can see that an equality sign would not be correct for (2.2.1) as long as the time interval T - t is finite: split up T - t into Ninfinitesimal time intervals $t_s = t + a\epsilon$; $N\epsilon = T - t$. Let $q_a = q_{t_a}$ and use the completness relation (2.1.33) for each t_a to write

$$\langle q_t' | q_T \rangle = \int dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \langle q_t' | q_1 \rangle \langle q_1 | q_2 \rangle \cdots \langle q_{N-1} | q_T \rangle .$$
 (166)

This is an exact quantum mechanical formula."

In realtà, tali osservazioni, inclusa l'ultima relazione, corrispondente alla 2.2.2 del Ramond e alla 11 nel lavoro di Dirac, coincidono con quelli riportati nell'articolo di Dirac, si vedano pagg.68-69 del suo lavoro disponibile at http:// www.ifi.unicamp.br/~cabrera/teaching/aula%2015%202010s1.pdf. Ramond attribuisce erroneamente a Feynman la relazione fondamentale (2.2.4)

$$\langle q_t' | q_{t+\delta t} \rangle = A \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \delta t L(q_t', q_{t+\delta t})\right\}.$$
 (167)

Infatti il testo di Ramond commenta tale relazione nel modo seguente

"where L (in the spirit of the Hamilton-Jacobi theory) is taken to be a function of q'_t and $q_{t+\delta t}$, we run into no conflict with the quantum mechanical formula (2.2.2). This is exactly what Feynman did! [*Rev. Mod. Phys.* **20**, 267 (1948).] This leads to the Feynman Path Integral for the transition amplitude, using (2.2.4) and (2.2.2):

$$\langle q_t' | q_T \rangle = \lim_{\substack{N \to \infty \\ N \in \text{ fixed}}} A^N \int \left(\prod_{i=1}^{N-1} dq_i \right) e^{\frac{i}{\hbar} \int_T^t dt L(q,\dot{q})}$$

$$\equiv \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} S(t,T,[q])} ,$$
(168)

where the second expression is just a fancy way of hiding our lack of knowledge about the measure; the square brackets indicate the functional relationship between S and q." D'altronde, anche la (167), corrispondente alla (2.2.4) del Ramond, è già riportata nel lavoro di Dirac. Questa corrisponde alla (9), cioè

$$\langle q_{t+dt} | q_t \rangle$$
 corresponds to $\exp[iLdt/\hbar]$. (169)

Il fatto che il lavoro di Dirac formuli il path integral, inclusa la corrispondenza classica, risulta in modo ancor più chiaro dalla seguente descrizione

"The right-hand side is then a function, not only of q_T and q_t , but also of q_1 , q_2, \ldots, q_m , and in order to get from it a function of q_T and q_t only, which we can equate to the left-hand side, we must substitute for q_1, q_2, \ldots, q_m their values given by the action principle. This process of substitution for the intermediate q's then corresponds to the process of integration over all values of these q's in (11).

Equation (11) contains the quantum analogue of the action principle, as may be seen more explicitly from the following argument. From equation (11) we can extract the statement (a rather trivial one) that, if we take specified values for q_T and q_t , then the importance of our considering any set of values for the intermediate q's is determined by the importance of this set of values in the integration on the right-hand side of (11). If we now make h tend to zero, this statement goes over into the classical statement that, if we take specified values for q_T and q_t , then the importance of our considering any set of values for the intermediate q's is zero unless these values make the action function stationary. This statement is one way of formulating the classical action principle."

Come visto, lo stesso testo di Ramond riporta ciò che peraltro è evidente, e cioè che la (2.2.4) e la (2.2.2) implicano il path integral. Il punto è che queste due relazioni non solo sono riportate nel lavoro di Dirac, ma già Dirac le connette descrivendo esplicitamente l'integrazione sui cammini. Il livello di profondità di pensiero raggiunto da Dirac è inoltre ulteriormente rafforzato da un altro aspetto fondamentale del suo lavoro: l'aver realizzato la rilevanza ed il ruolo delle traiettorie classiche. In particolare, colpisce il commento in cui il principio di azione classico possa, o addirittura debba, esser visto come limite della formulazione quantistica. Oltre a ciò Dirac dedica la sezione finale del lavoro all'estensione campistica del path integral, descrivendone i tratti salienti. In tale parte vi è una menzione ad uno slicing dello spazio tempo che ricorda quello considerato successivamente nella formulazione ADM della Relatività Generale.

È quindi chiaro che mentre a Feynman va il grandissimo merito di aver sviluppato a fondo il path integral ed aver introdotto il calcolo diagrammatico, è altresì indubbio che l'idea e la completa formulazione dei fondamenti del path integral sono dovute interamente a Dirac. Per completezza va menzionato che probabilmente a sua volta Dirac è stato influenzato in qualche misura dai seguenti due lavori di Jordan

P. Jordan, Uber kanonische Transformationen in der Quantenmechanik, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, Volume:37 Issue:4-5, (1926) 383-386,

e, citato da Dirac,

P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. II, Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei, Volume: 38, Issue: 6-7, (1926) 513-517.

Consideriamo ora un altro aspetto utile, quello riguardante la derivazione dell'elemento di matrice $\langle q', t | \hat{H} | q, t \rangle$, denotato anche $\langle q'_t | \hat{H} | q_t \rangle$. Eq.(162) implica $\langle q', t | \hat{H} | q, t \rangle = \langle q' | \hat{H} | q \rangle$. Ponendo $\hbar = 1$ e m = 1, si ha

$$\langle q'|\hat{H}|q \rangle = \int dl \langle q'|\hat{H}|l \rangle \langle l|q \rangle$$

$$= \int dl \langle q'|\frac{\hat{p}^2}{2} + V(q)|l \rangle \langle l|q \rangle$$

$$= \int dl \langle q'|\frac{l^2}{2} + V(q')|l \rangle \langle l|q \rangle$$

$$= \int \frac{dl}{2\pi} \left(\frac{l^2}{2} + V(q')\right) e^{il(q'-q)}$$

$$= \int \frac{dl}{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q'^2} + V(q')\right) e^{il(q'-q)} .$$

$$(170)$$

Questo è uno dei vari calcoli canonici dove è possibile trovare qualche svista a proposito dei fattori 2π . Per esempio, nell'equazione (6) dell'articolo di Mac-Kenzie, http://arxiv.org/pdf/quant-ph/0004090v1.pdf, è utilizzata la relazione $\int dp_j |p_j\rangle \langle p_j| = I$, con la non corretta aggiunta di 2π a denominatore. Ciò è bilanciato dal considerare $\langle q|p\rangle = \exp(ipq)$, dove manca il termine $\sqrt{2\pi}$. In proposito si osservi che in (170) si è posto

$$\langle q'|l\rangle\langle l|q\rangle = \frac{e^{ilq}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ilq'}}{\sqrt{2\pi}}$$

In particolare, la normalizzazione in

$$\langle q|p\rangle = \frac{e^{ipq}}{\sqrt{2\pi}} ,$$

è fissata da

$$\int \frac{dp}{2\pi} e^{ip(q-q')} = \delta(q-q') \; ,$$

compatibile con $\int dp |p\rangle \langle p| = I$, che implica

$$\int dp \langle q | p \rangle \langle p | q' \rangle = \delta(q - q') \; .$$

Il propagatore $\langle q', t' | q, t \rangle$ ammette varie rappresentazioni. Per esempio, poiché

$$\langle q', t'|q, t \rangle = \sum_{n} e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)} \psi_n(q') \bar{\psi}_n(q) = \sum_{n} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n(t'-t)} \psi_n(q') \bar{\psi}_n(q) ,$$

dove $H\psi_n = E_n\psi_n$, e

$$\delta(q'-q) = \sum_{n} \psi_n(q') \bar{\psi}_n(q) , \qquad (171)$$

si ha

$$\langle q', t'|q, t \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}\delta(q'-q)$$
.

Ciò è anche implicato dalla seguente osservazione. La distribuzione $\delta(q'-q)$ è l'ampiezza di probabilità che una particella nel punto q possa trovarsi nel punto q'. Se è noto che al tempo t la particella è nel punto q, si ha

$$\psi_q(Q,t) = \delta(Q-q) ,$$

che soddisfa $\hat{Q}\psi_q(Q,t)=q\psi_q(Q,t).$ Al tempo t'la funzione d'onda è

$$\psi(Q, t') = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}\psi_q(Q, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}\delta(Q-q)$$

Questa è l'ampiezza di probabilità di trovare una particella nel punto Q al tempo t' che al tempo t era nel punto q. Quindi, come già ovvio dalla relazione $\langle q', t'|q, t \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)} \langle q'|q \rangle$, si ha

$$\langle q',t'|q,t\rangle = \psi(q',t') = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}\delta(q'-q)$$
.

Si noti che l'usuale verifica della correttezza del path integral, riportata anche da Ramondconsidera prima l'espansione di $e^{-\frac{i}{\hbar}H(t'-t)}$, considerando il termine al prim'ordinein δt e poi riesponenzia, ottendendo un'espressione che è valida solo per $t' = t + \delta t$. Da qui si verifica che la posizione che Dirac deriva nel suo fondamentale lavoro è corretta. L'estensione dell'ampiezza a tempi finiti, cioè di $\langle q', t' | q, t \rangle$, vien fatta integrando su tutti i cammini (utilizzando la completezza). Il calcolo diretto richiederebbe l'utilizzo di opportune formule simili alla formula di Baker-Campbell-Hausdorff (questa la si può trovare, per esempio, in Eq.5 di https://arxiv.org/pdf/1501.02506.pdf).

Un'espressione in termini di autofunzioni di un operatore può esser derivata anche per le funzioni di Green. Dato un operatore differenziale lineare L_q , la funzione di Green è una soluzione arbitraria dell'equazione

$$L_q G(q',q) = \delta(q'-q) \; .$$

L'arbitrarietà nella definizione di G(q',q) è dovuta al fatto che se¹³

$$L_q\phi_0(q)=0 ,$$

allora $G(q',q) \in G(q',q) + \phi_0(q)$ soddisfano la stessa equazione. Se L_q ha coefficienti indipendenti da q, allora G(q',q) può essere scelta invariante sotto traslazioni

$$G(q'+a, q+a) = G(q', q)$$

In tal caso è conveniente indicare la funzione di Green con il simbolo G(q'-q). Considerando l'equazione agli autovalori

$$L_q \psi_n(q) = \lambda_n \psi_n(q) \; ,$$

e utilizzando la rappresentazione (171) della distribuzione δ , si ha

$$G(q'-q) = \sum_{n} \frac{1}{\lambda_n} \psi_n(q') \bar{\psi}_n(q) +$$

Nel contesto dell'approccio assiomatico, le funzioni di Green sono spesso chiamate covarianza. In proposito si veda il breve articolo di A. Wurm e M. Berg, "*Wick calculus*", http://arxiv.org/pdf/physics/0212061.pdf, riguardante l'ordinamento normale. Per ulteriori approfondimenti si consiglia l'eccellente e avanzato testo di P. Cartier e C. DeWitt-Morette, "*Functional integration, action and symmetries*", Cambridge, 2006.¹⁴

 $^{^{13}}$ Ovviamente, il numero di soluzioni linearmente indipendenti $L_q\phi_0=0$ è pari all'ordine dell'operator differenziale $L_q.$

 $^{^{14}{\}rm Tale}$ testo include un'interessante analisi della rotazione di Wick. Come esempio riportiamo il seguente commento, pag. 363, in connessione con la regolarizzazione dimensionale

[&]quot;When only the gaussian contribution to the functional integral is kept, the contour C is that appropriate to the Feynman propagator (see e.g. [3]) and runs from $-\infty$ to 0 below the negative real axis (in the complex k^0 - plane) and from 0 to ∞ above the positive real axis. If the integral (18.24) were convergent, the contour could be rotated so that it would run along the imaginary axis. One would set $k^0 = ik^n$, and (18.24) would become an integral over euclidean momentum-*n*-space. Generically, however, this rotation, which is known as Wick rotation, is not legitimate. Contributions from arcs at infinity, which themselves diverge or are nonvanishing, have to be included. These contributions cannot be handled by dimensional regularization."

Derivata funzionale

Consideriamo il seguente sviluppo formale di un funzionale G[f]

$$G[f] = G_0 + \int dx G_1(x) f(x) + \frac{1}{2!} \int dx_1 dx_2 G_2(x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) + \dots , \quad (172)$$

where G_0 è una costante e $G_n(x_1, \ldots, x_n)$ sono funzioni simmetriche. L'analogo del limite del rapporto incrementale che definisce la derivata è

$$\frac{\delta G[f]}{\delta f(x)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} (G[f(\cdot) + \epsilon \delta(\cdot - x)] - G[f(\cdot)]) , \qquad (173)$$

dove · in $f(\cdot)$ e $\delta(\cdot - x)$ indica l'argomento di ogni data f all'interno degli integrali. Così, per esempio,

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int dx_1 dx_2 G_2(x_1, x_2) f(x_1) f(x_2)$$

= $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int dx_1 dx_2 G_2(x_1, x_2) [(f(x_1) + \epsilon \delta(x_1 - x))(f(x_2) + \epsilon \delta(x_2 - x)) - f(x_1) f(x_2)]$
= $2 \int dx_1 G_2(x_1, x) f(x_1)$.

Tale relazione è di immediata derivazione se si osserva che (173) implica

$$\frac{\delta f(y)}{\delta f(x)} = \delta(y - x) , \qquad (174)$$

che permette un'altrettanto immediata verifica della relazione

$$G_n(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\delta^n G[f]}{\delta f(x_1)\ldots\delta f(x_n)}|_{f=0} .$$

Ciò identifica (172) come la naturale generalizzazione funzionale dello sviluppo di Taylor. Si noti che per il nostro scopo non è necessario che lo sviluppo (172) di G[f] converga. Come detto, questo va inteso nel senso di sviluppo formale. Un'utile relazione soddisfatta dalla derivata funzionale è

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x)}e^{i\langle J\phi\rangle} = \phi(x)e^{i\langle J\phi\rangle} \ .$$

Per ulteriori dettagli sulla derivata funzionale si consiglia https://cds. cern.ch/record/1383342/files/978-3-642-14090-7_BookBackMatter.pdf.

Richiamo sul formalismo operatoriale

Consideriamo la funzione di Green a due punti per una teoria scalare

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega
angle$$
 .

Il ket $|\Omega\rangle$ denota il vuoto della teoria interagente e $\phi(x)$ è l'operatore di campo in rappresentazione di Heisenberg

$$\phi(x) = e^{iHt}\phi(\mathbf{x})e^{-iHt} ,$$

mentre $\phi(\mathbf{x})$ è l'operatore di campo in rappresentazione di Schrödinger. Sia λ la costante d'autointerazione tale che, per $\lambda = 0$, si abbia V = 0 (per esempio $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}\phi^4$). Nel caso $\lambda = 0$, H si riduce all'hamiltoniana libera H_0 . $\phi(t, \mathbf{x})|_{\lambda=0}$ è noto come campo in rappresentazione d'interazione

$$\phi_I(t, \mathbf{x}) := \phi(t, \mathbf{x})|_{\lambda=0} = e^{iH_0(t-t_0)}\phi(t_0, \mathbf{x})e^{-iH_0(t-t_0)}$$

Vale la seguente rappresentazione della funzione a due punti

$$\langle \Omega | T\phi(x)\phi(y) | \Omega \rangle = \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \frac{\langle 0 | T\{\phi_I(x)\phi_I(y)\exp[-i\int_{-T}^T dt H_I(t)]\}|0\rangle}{\langle 0 | T\exp[-i\int_{-T}^T dt H_I(t)]\}|0\rangle},$$
(175)

dove $|0\rangle$ è il vuoto della teoria libera. A differenza di H, l'operatore

$$H_I(t) = e^{iH_0(t-t_0)} H_{\rm int} e^{-iH_0(t-t_0)} ,$$

che è il potenziale d'interazione in rappresentazione d'interazione, ha una dipendenza esplicita dal tempo. Nel caso $H_{\text{int}} = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi^4(\mathbf{x})$ si ha

$$H_I(t) = \frac{\lambda}{4!} \int d^3x \phi_I^4(x) \; .$$

$\phi_{cl}(x)$ e l'equazione di Schwinger-Dyson

Iniziamo con l'osservare che la regola di derivazione

$$\frac{d^k}{dx^k}(f(x)g(x)) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f^{(j)}(x)g^{(k-j)}(x) ,$$

implica, nel caso funzionale, la relazione

$$\left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right)^k J(x) = J(x) \left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right)^k - ik\delta(x-y) \left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right)^{k-1},$$

da cui

$$\left[\left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right)^k, J(x)\right] = -ik\delta(x-y)\left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right)^{k-1}.$$
(176)

Sviluppando in serie $V(\phi)$, da (176) segue

$$\left[V\left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right), J(x)\right] = -i\delta(x-y)V'\left(\frac{-i\delta}{\delta J(y)}\right).$$
(177)

Questa relazione è utilizzata nel testo di Ramond per mostrare che

$$\phi_{cl}(x) := \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J}{\langle \Omega | \Omega \rangle_J} = W^{-1}[J] \int D\phi \phi(x) e^{i(S + \langle J\phi \rangle)} ,$$

soddisfa l'equazione

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\phi_{cl}(x) = J(x) - W^{-1}[J]V'\left(\frac{-i\delta}{\delta J(x)}\right)W[J] .$$
(178)

Questa equazione, che può esser interpretata come deformazione quantistica dell'equazione classica di Klein-Gordon in presenza di sorgente esterna, è anche nota come equazione di Schwinger-Dyson. Nel seguito mostriamo che tale equazione è equivalentemente derivabile assumendo che l'integrale di una derivata funzionale totale sia nullo

$$\int D\phi \frac{\delta F[\phi]}{\delta \phi} = 0 \; .$$

Ovviamente la validità di tale relazione dipende dalla struttura dello spazio su cui si integra, "lo spazio delle ϕ ", nonché dalle proprietà del funzionale $F[\phi]$. Si ha quindi

$$\int D\phi \frac{\delta}{\delta\phi(x)} e^{i(S+\langle J\phi\rangle)} = i \int D\phi \Big(\frac{\delta S}{\delta\phi(x)} + J(x)\Big) e^{i(S+\langle J\phi\rangle)} = 0 , \qquad (179)$$

ovvero

$$\langle \Omega | \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + J(x) | \Omega \rangle_J = 0 .$$
 (180)

In altri termini, il valore d'aspettazione delle equazioni del moto, funzionalmente identiche a quelle classiche, è nullo. Tale relazione può essere interpretata come versione campistica del teorema di Erhenfest. Per mostrare l'equivalenza tra (178) e (179), si noti che

$$\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} = -\partial_{\mu} \partial^{\mu} \phi(x) - m^2 \phi(x) - V'(\phi(x)) \; .$$

Quindi, (179) diventa

$$\int D\phi(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\phi(x)e^{i(S+\langle J\phi\rangle)} - J(x)W[J] + V'\Big(\frac{-i\delta}{\delta J(x)}\Big)W[J] = 0 ,$$

che, divisa per W[J], riproduce la (178). Si osservi che le derivate funzionali rispetto a J, calcolate a J = 0, corrispondono a relazioni tra correlatori di ϕ . Mostriamo questo considerando un ulteriore modo di ottenere l'equazione di Schwinger-Dyson, esteso al caso in cui vi siano più campi scalari ϕ_a , $a = 1, \ldots, N$. L'idea segue dalla seguente osservazione. Prima si nota l'identità conseguenza di un cambio di notazione

$$\int \prod_{1}^{N} D\phi_a(x) F[\{\phi\}] = \int \prod_{1}^{N} D\phi'_a F[\{\phi'\}]$$

dove $\{\phi\} := \phi_1, \ldots, \phi_N$. Si pone quindi

$$\phi_a'(x) = \phi_a(x) + \delta \phi_a(x) ,$$

che può esser vista come una traslazione costante di $\delta \phi_a$. Ciò risulta evidente se si osserva che $D\phi_a(x)$ può esser visto come la generalizzazione di $\prod_i dq^i(t)$, con **x** corrispondente ad una estensione al continuo dell'indice di coordinata *i*. L'integrazione viene fatta, come nel caso di $q^i(t)$, per ogni istante *t*. Quindi

$$D\phi'_a(x) = D\phi_a(x)$$
.

Si ha quindi

$$\int \prod_{1}^{N} D\phi_a(x) F[\{\phi\}] = \int \prod_{1}^{N} D\phi_a F[\{\phi'\}] = \int \prod_{1}^{N} D\phi_a F[\{\phi+\delta\phi\}] ,$$

da cui, osservando che

$$F[\{\phi + \delta\phi\}] = F[\{\phi\}] + \int d^4x \sum_{1}^{4} \frac{\delta F[\{\phi\}]}{\delta\phi_a(x)} \delta\phi_a(x) ,$$

si ha

$$\int D\phi \int d^4x \Big(\frac{\delta S}{\delta\phi_a(x)} + J_a(x)\Big)\delta\phi_a(x)e^{i(S + \langle J_a\phi_a\rangle)} = 0 \ .$$

Le derivate di ordine n rispetto alle J_a , calcolate a $J_a = 0$, danno

$$\int D\phi \int d^4x \Big(i \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_{a_1}(x_1) \cdots \phi_{a_n}(x_n) + \sum_{k=1}^n \phi_{a_1}(x_1) \cdots \delta_{aa_k} \delta(x - x_k) \cdots \phi_{a_n}(x_n) \Big) \delta \phi_a(x) e^{iS} = 0 .$$
(181)

Data l'arbitrarietà di $\delta \phi_a$, tale relazione implica che l'integrando, rispetto a x, deve esser nullo. La relazione è quindi equivalente a

$$i\langle \Omega | T \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) | \Omega \rangle$$

+ $\langle \Omega | T \sum_{k=1}^n \phi_{a_1}(x_1) \dots \delta_{aa_j} \delta(x - x_j) \dots \phi_{a_n}(x_n) | \Omega \rangle = 0$, (182)

che implica

$$\langle \Omega | T \frac{\delta S}{\delta \phi_a(x)} \phi_{a_1}(x_1) \dots \phi_{a_n}(x_n) | \Omega \rangle = 0 , \ per \ x \neq x_1, \dots, x_n .$$

Per approfondimenti si consiglia la sezione 9.6 del testo di Peskin e Schroeder, le note http://www.physics.indiana.edu/~dermisek/QFT_09/qft-II-4-4p. pdf, nonché la discussione at http://physics.stackexchange.com/questions/ 26888/on-shell-symmetry-from-a-pathintegral-point-of-view.

Identificazione della funzione a N-punti nel formalismo dell'integrale sui cammini

Umberto Natale

Come si è visto, l'ampiezza $\langle q_b, T | q_a, 0 \rangle$ è esprimibile in termini dell'integrale sui cammini. Consideriamo il caso generale di un sistema quantistico descritto da un insieme di coordinate $\{q^k\}$ e momenti coniugati $\{p^k\}$. Denotiamo con q_a una configurazione iniziale per tali coordinate, e con q_b una configurazione finale, sottintendendole come gli insiemi $\{q_a^k\}$ e $\{q_b^k\}$. Si ha

$$\langle q_b, T | q_a, 0 \rangle = \left(\prod_k \int Dq(t) Dp(t)\right) \exp\left[i \int_0^T dt \left(\sum_k p^k \dot{q}^k - H(q, p)\right)\right].$$
(183)

Si noti che mentre le q(t) hanno valori fissati agli estremi, $q(0) = q_a e q(T) = q_b$, le funzioni p(t) non hanno tali vincoli. La misura in (183) corrisponde

esattamente a

$$\prod_k \int \frac{dq^k dp^k}{2\pi\hbar} \; ,$$

ad ogni istante temporale. Le coordinate q^k possono essere intepretate come un campo scalare $\phi(\mathbf{x})$, in altre parole $q \to \phi$, mentre k diventa l'indice continuo tridimensionale **x**. L'hamiltoniana corrispondente è

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + V(\phi) \right] \,.$$

L'analogo dell'ampiezza di transizione (183) è

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int D\phi D\pi \exp\left[i \int_0^T d^4x \left(\pi \dot{\phi} - \frac{1}{2} \pi^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - V(\phi) \right) \right],$$

dove $\phi(0, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) e \phi(T, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x})$. Poiché l'hamiltoniana è quadratica in π , si ha

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = \int D\phi \exp\left(i \int_0^T d^4 x \mathcal{L}\right) ,$$
 (184)

dove

$$\mathcal{L} = \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi / 2 - V(\phi) \; .$$

Si osservi che, eccetto per la dipendenza temporale data dall'intervallo d'integrazione, l'espressione di $\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle$ è manifestamente invariante di Lorentz.

Prima di continuare con l'analisi, è utile fare un'osservazione. Come nel caso dell'espressione del path integral per l'ampiezza $\langle x', t'|x, t \rangle$, anche in questo caso è possibile estrarre dal bra-ket l'operatore di evoluzione temporale

$$\langle \phi_b(\mathbf{x}) | e^{-iHT} | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = e^{-iHT} \langle \phi_b(\mathbf{x}) | \phi_a(\mathbf{x}) \rangle = e^{-iHT} \delta(\phi_b(\mathbf{x}) - \phi_a(\mathbf{x}))$$

Si osservi che $\delta(\phi_b(\mathbf{x}) - \phi_a(\mathbf{x}))$ è una distribuzione con argomento una differenza di campi. L'ovvia rappresentazione è

$$\delta(\phi_b(\mathbf{x}) - \phi_a(\mathbf{x})) = N \int D\pi(x) e^{i \int d^4 \pi(x)(\phi_b(\mathbf{x}) - \phi_a(\mathbf{x}))} dx$$

Di seguito mostriamo che le funzioni di Green si possono ottenere derivando il funzionale generatore W[J] rispetto alla corrente esterna J(x), cioè

$$\langle \Omega! T\phi(x_1) \dots \phi(x_N) | \Omega \rangle = \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\phi\phi(x_1) \cdots \phi(x_N) e^{i \int_{-T}^{T} d^4 x \mathcal{L}}}{\int D\phi e^{i \int_{-T}^{T} d^4 x \mathcal{L}}} \quad (185)$$
Consideriamo l'espressione

$$\int D\phi(x)\phi(x_1)\phi(x_2)\exp\left(i\int_{-T}^{T}d^4x\mathcal{L}\right)\,,\tag{186}$$

con $x_1^0, x_2^0 \in [-T, T]$. Rispetto a (184) si è considerato un intervallo temporale centrato in t = 0, quindi ora $\phi(-T, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) \in \phi(T, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x})$. Di seguito mostreremo la connessione tra (186) e $\langle \Omega | T \phi(x_1) \phi(x_2) | \Omega \rangle$. A tal fine osserviamo che

$$\int D\phi(x) = \int D\phi_1(\mathbf{x}) \int D\phi_2(\mathbf{x}) \int_{[V]} D\phi(x) ,$$

dove il vincolo [V] sull'ultimo integrale è dato, per qualsiasi \mathbf{x} , oltre che da $\phi(-T, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) \in \phi(T, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x})$, anche da

$$\phi(x_1^0, \mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) , \qquad \phi(x_2^0, \mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}) .$$
 (187)

Questa uguaglianza è garantita in quanto le due integrazioni successive eliminano tale vincolo. L'utilità di tale decomposizione è dovuta al fatto che lo spazio delle funzioni su cui si integra nel terzo integrale sono quelle che ai tempi $x_1^0 e x_2^0$ coincidono proprio con $\phi_1(\mathbf{x}) e \phi_2(\mathbf{x})$, rispettivamente. Segue che $\phi(x_1) e \phi(x_2)$ in (186), che, in accordo con (187), corrispondono a $\phi_1(\mathbf{x}_1)$ $e \phi_2(\mathbf{x}_2)$, possono essere portati fuori dal terzo integrale. Supponendo $x_1^0 < x_2^0$, la (186) è equivalente a

$$\int D\phi_{1}(\mathbf{x}) \int D\phi_{2}(\mathbf{x})\phi_{1}(\mathbf{x}_{1})\phi_{2}(\mathbf{x}_{2}) \int_{[V]} D\phi(x)e^{i\int_{-T}^{x_{1}^{0}}d^{4}x\mathcal{L}+i\int_{x_{1}^{0}}^{x_{2}^{0}}d^{4}x\mathcal{L}} = \int D\phi_{1}(\mathbf{x}) \int D\phi_{2}(\mathbf{x})\phi_{1}(\mathbf{x}_{1})\phi_{2}(\mathbf{x}_{2})\langle\phi_{b},T|\phi_{2},x_{2}^{0}\rangle\langle\phi_{2},x_{2}^{0}|\phi_{1},x_{1}^{0}\rangle\langle\phi_{1},x_{1}^{0}|\phi_{a},-T\rangle ,$$
(188)

dove si sono usate due relazioni. La prima è

$$\int_{[V]} D\phi(x) e^{i \int_{-T}^{T} d^{4}x\mathcal{L}} = \int_{[V_{1}]} D\phi(x) e^{i \int_{-T}^{x_{1}^{0}} d^{4}x\mathcal{L}} \int_{[V_{2}]} D\phi(x) e^{i \int_{x_{1}^{0}}^{x_{2}^{0}} d^{4}x\mathcal{L}} \int_{[V_{3}]} D\phi(x) e^{i \int_{x_{2}^{0}}^{T} d^{4}x\mathcal{L}} ,$$

dove il vincolo $[V_1]$ corrisponde a $\phi(-T, \mathbf{x}) = \phi_a(\mathbf{x}) \in \phi(x_1^0, \mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}), [V_2]$ corrisponde a $\phi(x_1^0, \mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}) \in \phi(x_2^0, \mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x})$, mentre $[V_3]$ corrisponde a $\phi(x_2^0, \mathbf{x}) = \phi_2(\mathbf{x}) \in \phi(T, \mathbf{x}) = \phi_b(\mathbf{x})$. L'altra relazione è la (184) che riscriviamo nella forma

$$\langle \phi_{\beta}, t_2 | \phi_{\alpha}, t_1 \rangle = \int D\phi(x) e^{i \int_{t_1}^{t_2} d^4 x \mathcal{L}}$$

Poiché il ket $|\phi,t\rangle$ si riferisce alla rappresentazione di Heisenberg, si ha, per ognit,

$$|\phi,t\rangle = e^{iHt}|\phi\rangle ,$$

dove $|\phi\rangle$ è il ket in rappresentazione di Schrödinger. Denotiamo temporaneamente gli operatori in rappresentazione di Schrödinger e di Heisenberg aggiungendo, rispettivamente, i suffissi S e H ai campi. Si noti che $\phi_S(\mathbf{x}_1)$ e $\phi_S(\mathbf{x}_2)$, soddisfano le seguenti proprietà

$$\phi_S(\mathbf{x}_1)|\phi_1
angle=\phi_1(\mathbf{x}_1)|\phi_1
angle\;,\qquad \phi_S(\mathbf{x}_2)|\phi_2
angle=\phi_2(\mathbf{x}_2)|\phi_2
angle\;.$$

È quindi possibile trasformare $\phi_1(\mathbf{x}_1) \in \phi_2(\mathbf{x}_2)$ in (188) in operatori che agiscono sui ket $|\phi_1\rangle \in |\phi_2\rangle$, rispettivamente. Quindi, la (186) è equivalente a

$$\int D\phi_1 \int D\phi_2 \langle \phi_b | e^{-iH(T-x_2^0)} \phi_S(\mathbf{x}_2) | \phi_2 \rangle \langle \phi_2 | e^{-iH(x_2^0-x_1^0)} \phi_S(\mathbf{x}_1) | \phi_1 \rangle \langle \phi_1 | e^{-iH(x_1^0+T)} | \phi_a \rangle$$

= $\langle \phi_b | e^{-iHT} \phi_H(x_2) \phi_H(x_1) e^{-iHT} | \phi_a \rangle$,

dove è stata utilizzata la relazione di completezza $\int D\phi |\phi\rangle \langle \phi| = I$, e la relazione tra gli operatori in rappresentazione di Heisenberg e quelli in rappresentazione di Schrödinger

$$O_H(t) = e^{iHt} O_S e^{-iHt} \; .$$

Nel caso $x_1^0 > x_2^0$ si ottiene la stessa espressione ma con l'interscambio tra ϕ_1 e ϕ_2 . Quindi, la (186) è equivalente a

$$\langle \phi_b | e^{-iHT} T (\phi_H(x_2) \phi_H(x_1)) e^{-iHT} | \phi_a \rangle$$
.

Introducendo un insieme completo di autostati dell'hamiltoniana, si ha

$$\langle \phi_b | e^{-iHT} T (\phi_H(x_2)\phi_H(x_1)) | e^{-iHT} | \phi_a \rangle$$

= $\sum_{m,n} e^{-i(E_n + E_m)T} \langle \phi_b | E_n \rangle \langle E_n | T (\phi_H(x_2)\phi_H(x_1)) | E_m \rangle \langle E_m | \phi_a \rangle .$

Come nel caso della relazione (175), ci interessa il limite $T \to \infty(1 - i\epsilon)$ di questa espressione. In tal modo si seleziona la componente $|\Omega\rangle$, corrispondente al vuoto, degli stati $|\phi_a\rangle \in |\phi_b\rangle$. Ciò implica l'assunzione che $\langle \phi_a | \Omega \rangle \in$ $\langle \phi_b | \Omega \rangle$ non siano nulli. Per esempio, nel limite $T \to \infty(1 - i\epsilon)$ (per dettagli si vedano le sezioni 4.2 e 9.2 del testo di Peskin-Schroeder)

$$e^{-iHT}|\phi_a\rangle = \sum_n e^{-iE_nT}|E_n\rangle\langle E_n|\phi_a\rangle \sim \langle \Omega|\phi_a\rangle e^{-iE_0\cdot\infty(1-i\epsilon)}|\Omega\rangle$$

Risulta che i termini di difficile trattazione si elidono se si divide l'espressione (186) per $\int D\phi \exp(i \int_{-T}^{T} d^4 x \mathcal{L})$. In particolare,

$$\langle \Omega | T\phi_H(x_2)\phi_H(x_1) | \Omega \rangle = \lim_{T \to \infty(1-i\epsilon)} \frac{\int D\phi\phi(x_1)\phi(x_2)e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\mathcal{L}}}{\int D\phi e^{i\int_{-T}^{T} d^4x\mathcal{L}}}$$

La dimostrazione del caso generale (185) segue da un'ovvia estensione della precedente derivazione.

Z[J] come generatore delle funzioni di Green connesse

Umberto Natale

Di seguito dimostreremo che Z[J] è il funzionale generatore delle funzioni di Green connesse $G_c^{(N)}$, cioè

$$\frac{\delta^N i Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} = i^N G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) .$$
(189)

Le funzioni di Green ad N punti sono date da tutte le possibili combinazioni di diagrammi di Feynman non equivalenti. Segue che queste corrispondono alla somma di tutti i contributi disconnessi fattorizzati su un certo numero di copie dei contributi connessi. Quindi

$$G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\{\sigma_k\}_N} \sum_{\mathcal{P}} \mathcal{P}\left(\underbrace{\left[G_c^{(1)}(\dots) \cdots G_c^{(1)}(\dots)\right]}_{\sigma_1} \underbrace{\left[G_c^{(2)}(\dots) \cdots G_c^{(2)}(\dots)\right]}_{\sigma_2} \cdots \right),$$
(190)

dove $\{\sigma_k\}_N$ denota l'insieme di tutti i possibili interi σ_k tali che $\sum_{k=1}^N k \sigma_k = N$. \mathcal{P} denota le permutazioni di x_1, \ldots, x_N tali per cui un dato prodotto di funzioni di Green connesse trasformi in uno non equivalente. Si noti che inserendo la (190) nel funzionale generatore

$$W[J] = e^{iZ[J]} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \langle G^{(N)}(x_1, \dots, x_N) J(x_1) \cdots J(x_N) \rangle , \qquad (191)$$

segue che, a causa dell'integrazione su x_1, \ldots, x_N , tutte le permutazioni in (190) danno lo stesso contributo. Possiamo quindi sostituire tutte le $G^{(N)}$ in (191) con il membro destro di (190) rimpiazzando la somma su \mathcal{P} del prodotto delle funzioni di Green connesse con un solo rappresentativo, moltiplicato per il numero di permutazioni di x_1, \ldots, x_N che cambiano tale prodotto. Per determinare questo numero, si osservi che tra le N! permutazioni degli Npunti, ve ne sono solamente due tipi che lasciano invariato il prodotto delle funzioni di Green connesse nelle parentesi quadre in (190). Una tipo corrisponde alle σ_k ! permutazioni che cambiano il solo ordinamento dei fattori in tale prodotto. Per esempio, la permutazione $x_1x_2x_3x_4 \rightarrow x_3x_4x_1x_2$ trasforma $G_c^{(2)}(x_1, x_2)G_c^{(2)}(x_3, x_4)$ nell'equivalente $G_c^{(2)}(x_3, x_4)G_c^{(2)}(x_1, x_2)$. Inoltre, poiché le $G_c^{(k)}$ sono completamente simmetriche nei loro argomenti, anche le permutazioni corrispondenti alle k! permutazioni dei suoi k argomenti non hanno alcun effetto sul prodotto delle funzioni di Green connesse. Segue che il numero totale di permutazioni delle coordinate che cambiano tale prodotto è

$$\frac{N!}{(\sigma_1!\cdots\sigma_N!)(1!)^{\sigma_1}\cdots(N!)^{\sigma_N}}$$

Da quanto detto segue che inserendo la (190) in (191), si ha

$$W[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{\sigma_k\}_N} i^N \frac{\left(\int d^4x G_c^{(1)}(x) J(x)\right)^{\sigma_1}}{\sigma_1! (1!)^{\sigma_1}} \frac{\left(\int d^4x \int d^4y G_c^{(2)}(x,y) J(x) J(y)\right)^{\sigma_2}}{\sigma_2! (2!)^{\sigma_2}} \dots$$
(192)

La condizione $\sum_{k=1}^{N} k\sigma_k = N$ permette di sostituire i^N in (192) con fattori $i^{k\sigma_k}$ che moltiplicano gli integrali elevati alla σ_k . Si osservi inoltre che

$$\sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{\sigma_k\}_N} = \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \sum_{\sigma_2=0}^{\infty} \dots$$

Quindi

$$W[J] = \sum_{\sigma_1=0}^{\infty} \frac{i^{\sigma_1}}{\sigma_1!} \left[\frac{1}{1!} \langle G_c^{(1)}(x)J(x) \rangle \right]^{\sigma_1} \sum_{\sigma_2=0}^{\infty} \frac{i^{2\sigma_2}}{\sigma_2!} \left[\frac{1}{2!} \langle G_c^{(2)}(x,y)J(x)J(y) \rangle \right]^{\sigma_2} \dots$$

Poiché ognuno dei fattori è lo sviluppo di un esponenziale, si ha

$$W[J] = \exp\left\{\frac{i}{1!}\langle G_c^{(1)}(x)J(x)\rangle + \frac{i^2}{2!}\langle G_c^{(2)}(x,y)J(x)J(y)\rangle + \dots\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{N=0}^{\infty}\frac{i^N}{N!}\langle G_c^{(N)}(x_1,\dots,x_N)J(x_1)\cdots J(x_N)\rangle\right\},$$

da cui

$$iZ[J] = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{i^N}{N!} \langle G_c^{(N)}(x_1, \dots, x_N) J(x_1) \cdots J(x_N) \rangle ,$$

che è equivalente alla (189).

Commento sulle funzioni di Green connesse

In D dimensioni il funzionale generatore di una teoria scalare è

$$W[J] = e^{iZ[J]} = N \int D\phi \exp\left[i \int d^D x \left(\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - V(\phi) + J\phi\right)\right].$$
(193)

Riscriviamo (189) nella forma,¹⁵

$$\frac{1}{i^{N-1}} \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} |_{J=0} = \langle \Omega | T\phi(x_1) \dots \phi(x_N) | \Omega \rangle_c .$$
(194)

Se al campo ϕ in $J\phi$ in (193) viene aggiunta una funzione arbitraria f, allora il membro destro di (194) è sostituito dai correlatori connessi di $\phi+f$. Questa trasformazione è equivalente a rimpiazzare Z[J] con $Z[J] + \int d^D x J(x) f(x)$, quindi, per $N \geq 2$,

$$\frac{\delta^N(Z[J] + \int d^D x J(x) f(x))}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} = \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} .$$
(195)

Ciò implica che le funzioni di Green connesse di $\phi \in \phi + f$ coincidono per $N \ge 2$. In particolare, scegliendo

$$f(x) = -\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle$$
,

si ha che le funzioni a N-punti connesse di ϕ e $\eta=\phi-\langle\Omega|\phi|\Omega\rangle$ coincidono per $N\geq 2$

$$\langle \Omega | T\phi(x_1) \dots \phi(x_N) | \Omega \rangle_c = \langle \Omega | T\eta(x_1) \dots \eta(x_N) | \Omega \rangle_c ,$$
 (196)

che vale anche quando $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle$ dipende da x. Nel caso $v := \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle \neq 0$, è utile considerare η come campo elementare, e trasformare il termine $J\phi$ in $J(\phi - v)$. Nel caso di vuoto traslazionalmente invariante, cioè tale che $P_{\mu} | \Omega \rangle = 0$, v è costante, cosicché la densità di lagrangiana in (193) diventa

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \eta \partial^{\mu} \eta - \frac{1}{2} m^2 (\eta + v)^2 - V(\eta + v) + J\eta$$

Si noti che $D\eta = D\phi$. Con tale modifica, per qualsiasi N si ha

$$\frac{1}{i^{N-1}} \frac{\delta^N Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} |_{J=0} = \langle \Omega | T\eta(x_1) \dots \eta(x_N) | \Omega \rangle_c$$

In particolare, $\langle \Omega | \eta(x) | \Omega \rangle = 0$.

¹⁵Il fattore $(-1)^N$ nella (3.2.15) del testo di Ramond deve essere sostituito da i^N .

Rotazione di Wick

Cominciamo con il considerare la funzione di Wightman¹⁶

$$W^{(2)}(x-y) = \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$
.

Consideriamo ora la funzione analitica di $z = x^4 + ix^0$, ristretta al semipiano destro $x^4 > 0$, tale che

$$W^{(2)}(x^0, \mathbf{x}) = \lim_{x^4 \downarrow 0} S(\mathbf{x}, x^4 + ix^0)$$
.

Il valore limite non esiste puntualmente ma nel senso delle distribuzioni. Questo è uno dei motivi per cui nella formulazione assiomatica si presta particolare attenzione al fatto che si sta trattando con distribuzioni piuttosto che di campi. Per esempio, gli stessi campi liberi sono quantità singolari. Per questo si utilizzano gli "smeared fields"

$$\phi(f) = \int d^4x f(x)\phi(x) \, ,$$

dove f(x) è una funzione di test, tipicamente appartenente allo spazio di Schwarz. Al contrario di $W(x^0, \mathbf{x})$, $S(\mathbf{x}, x^4 + ix^0)$ ha proprietà di analiticità: tutti i punti nel semiasse $z = x^4 > 0$ sono nel suo dominio di analiticità. Il calcolo di S lo si fa quindi in tale dominio. Per questo poniamo $x^0 = 0$ e definiamo

$$S(x) := S(\mathbf{x}, x^4) \; .$$

Nel caso di teoria non interagente, la funzione di Wightman è

$$W^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega} e^{i(\mathbf{px} - \omega x^0)}$$

 $\omega = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Si ha quindi

$$S(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{2\omega} e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}-\omega x^4}$$

¹⁶La seguente analisi segue il testo di Gert Roepstorff, "*Path Integral Approach to Quantum Physics*" che fornisce un'ottima analisi della continuazione analitica. Si veda, in particolare, il diagramma a pag. 220. Un eccellente quanto rigoroso e chiaro testo, dove è discussa la continuazione analitica, è quello di Eberhard Zeidler, "*Quantum Field Theory. I Basics in Mathematics and Physics. A Bridge Between Mathematicians and Physicists*". Si veda, in particolare, da pag. 640 a pag. 647. Per una dettagliata analisi del propagatore di Feynman si veda http://bolvan.ph.utexas.edu/~vadim/Classes/15f/propagator. pdf. Nel pedagogico articolo https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0205085.pdf sono riportati tre modi di calcolare il propagatore di Feynman. Espressioni esplicite di vari propagatori sono riportate at https://en.wikipedia.org/wiki/Propagator.

che è valida solo per $x^4 > 0$. Si noti che

$$\frac{1}{2\omega}e^{-\omega x^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp^4 \frac{e^{ip^4x^4}}{p^2 + m^2} , \qquad x^4 > 0 ,$$

con $p=(p^1,p^2,p^3,p^4)$ e $p^2=\sum_1^4(p^k)^2,$ da cui segue

$$S(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ipx}}{p^2 + m^2} = \begin{cases} (2\pi)^{-2}m|x|^{-1}K_1(m|x|) , & \text{se } m > 0 , \\ (2\pi)^{-2}|x|^{-2}, & \text{se } m = 0 , \end{cases}$$

dove $px = \sum_{1}^{4} p^{k} x^{k}$, $|x| = \sqrt{x^{2}} e K_{1}$ è la funzione di Bessel modificata. C'è una considerevole somiglianza tra la funzione di Schwinger, che è la funzione a due punti nell'euclideo, e il propagatore di Feynman

$$\Delta_F(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

In effetti, il momento quadro minkowskiano p^2 diventa, sotto rotazione di Wick, $-p^2$. Più precisamente, ponendo

$$p^{0} + ip^{4} = re^{i\alpha}$$
, $(p^{0})^{2} + i0^{+} = [p^{0}(1+i0^{+})]^{2} = (p^{0}e^{i0^{+}})^{2}$,

si vede che la rotazione di Wick corrisponde alla variazione d'angolo da 0^+ a $\pi/2,$ cosicché

$$(p^0 e^{i0^+})^2 \to (p^0 e^{i\pi/2})^2 = -(p^0)^2$$
.

Si ha quindi che le trasformate di Fourier $\Delta_F(p) = -S(p) = -(p^2 + m^2)^{-1}$ sono connesse tramite continuazione analitica rispetto alla variabile complessa $w = p^0 + ip^4$. Poiché nel caso libero tutte le funzioni a *n*-punti sono costruite in termini della due punti, risulta, almeno in tal caso, una stretta relazione tra le funzioni di Wightman e di Schwinger.

Va osservato che vi sono diversi tipi di continuazione anlitica considerate nella precedente analisi. Le funzioni di Wightman e di Schwinger in rappresentazione delle coordinate sono connesse tramite continuazione analitica, ma solo per $x^4 > 0$, cioè

$$W^{(2)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega} e^{i(\mathbf{px} - \omega x^0)}$$

= $\lim_{x^4 \downarrow 0} S(\mathbf{x}, x^4 + ix^0)$
= $\lim_{x^4 \downarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p}{2\omega} e^{i\mathbf{px} - \omega(x^4 + ix^0)}$. (197)

Osserviamo anche che la definizione di S(x), non di $S(\mathbf{x}, x^4 + ix^0)$, è estendibile all'intero asse x^4 . L'unica singolarità si ha nell'origine dove S(x) ha l'andamento $1/x^2$, singolarità che comunque è integrabile in d^4x .

Quanto sopra detto è utile anche per accorgersi quando in letteratura si trascurano delle singlarità nel considerare le continuazioni analitiche. Si consideri il caso dell'oscillatore armonico forzato riportato nella sezione 2.3 nel testo di Ramond. Il funzionale generatore è

$$W[F] = \exp\left[-\frac{i}{2}\langle F(t_1)D(t_1 - t_2)F(t_2)\rangle\right]$$

dove

$$D(t) = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-itE}}{E^2 - \omega^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2i\omega} [\theta(t)e^{-i\omega t} + \theta(-t)e^{i\omega t}] .$$
(198)

Talvolta è affermato che, anche in questo caso, è possibile cambiare contorno d'integrazione dall'asse reale all'asse immaginario del piano complesso E. Ciò seguirebbe dal teorema di Cauchy in quanto, ruotando di un angolo $\pi/2$ il contorno d'integrazione in senso antiorario, non si incontrano singolarità. D'altronde per ruotare il contorno d'integrazione è necessario chiudere i contorni all'infinito in modo tale che non si racchiudano singolarità e sia applicabile il Lemma di Jordan. In tal modo un contorno d'integrazione ruotato risulta dare lo stesso valore dell'integrale. Nel caso in esame, sarebbe necessario chiudere alla Jordan con quarti di circonferenza nel primo e terzo quadrante. Ma ciò non è possibile in quanto e^{-itE} , il cui andamento asintotico dipende anche da t, non può andare a zero sia per ImE > 0 che per ImE < 0.

Riportiamo di seguito alcune formule utilizzate in letteratura relativamente alle variabili minkowskiane e euclidee. Denotiamo con la barra le variabili euclidee. Si ha

 $x_0 = -i\bar{x}_0$, $p_0 = i\bar{p}_0$.

Per ogni vettore A_{μ} , poniamo $\bar{A} = (\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3)$, con $\bar{A}_k = A_k, k = 1, 2, 3$. Si ha

$$x^2 = -\bar{x}^2$$
, $p^2 = -\bar{p}^2$, $d^4x = -id^4\bar{x}$, $d^4p = id^4\bar{p}$.

Inoltre,

$$\frac{\partial}{\partial x_0} = i \frac{\partial}{\partial \bar{x}_0} , \quad \partial^2 = \partial_{x_0}^2 - \sum_{k=1}^3 \partial_{x_k}^2 = -\partial_{\bar{x}_0}^2 - \sum_{k=1}^3 \partial_{\bar{x}_k}^2 = -\bar{\partial}^2 ,$$

dove $\bar{\partial} := (\partial_{\bar{x}_0}, \partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$ e la metrica è quella euclidea $\delta_{\mu\nu}$. Quindi

$$\bar{A} \cdot \bar{B} := \bar{A}_{\mu} \bar{B}_{\mu} = \bar{A}_{\mu} \bar{B}^{\mu} = \bar{A}^{\mu} \bar{B}^{\mu} = \bar{A}_{0} \bar{B}_{0} + \ldots + \bar{A}_{3} \bar{B}_{3}$$

La struttura della trasformata di Fourier rimane invariata, infatti¹⁷

$$p \cdot x = p_0 x_0 - \sum_{k=1}^3 p_k x_k = \bar{p}_0 \bar{x}_0 - \sum_{k=1}^3 p_k x_k \neq -\bar{p}_\mu \bar{x}^\mu .$$

Si osservi che tale espressione non è O(4) invariante. In proposito c'è un'apparente contraddizione: come è possibile che la trasformata di Fourier di una quantità che è O(4) invariante, come il propagatore di Feynman nell'euclideo, sia anch'essa O(4) invariante? Si consideri

$$\Delta_{FE}(\bar{x}) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{\exp[i(\bar{p}_0\bar{x}_0 - \bar{p}_1\bar{x}_1 - \bar{p}_2\bar{x}_2 - \bar{p}_3\bar{x}_3)]}{\bar{p}^2 + m^2} .$$
(199)

Ricordando che

$$\int_{-a}^{a} dx f(x) = \int_{-a}^{a} dx f(-x) ,$$

si ha che (199) è invariante se nell'inegrando si sotituisce $\bar{p}_0 \operatorname{con} - \bar{p}_0$, per cui

$$\Delta_{FE}(\bar{x}) = \int \frac{d^4\bar{p}}{(2\pi)^4} \frac{\exp[i(-\bar{p}_0\bar{x}_0 - \bar{p}_1\bar{x}_1 - \bar{p}_2\bar{x}_2 - \bar{p}_3\bar{x}_3)]}{\bar{p}^2 + m^2} \,.$$

Concludiamo osservando che il fatto che la rotazione del cammino d'integrazione nel piano complesso temporale abbia verso opposto della rotazione del cammino d'integrazione nel piano complesso dell'energia, lo si può anche dedurre dalla relazione euristica¹⁸

$$p_0 \sim i\hbar \frac{\partial}{\partial x_0} = ii\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{x}_0} \sim i\bar{p}_0 \; .$$

$$p_E := (p_4, \mathbf{p}) = (\omega, \mathbf{p}) , \qquad x_E := (-\tau, \mathbf{x}) ,$$

cosicché il prodotto scalare euclideo coincide con quello minkowsiano

$$p_E x_E = -\omega \tau + \mathbf{p} \mathbf{x}$$

È interessante notare che anche in questo caso si ha una sorta di inversione temporale.

 $^{18} \mathrm{In}$ meccanica quantistica

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \; ,$$

corrisponde all'espressione del momento in rappresentazione delle coordinate, dove $\hat{x} = x$. Comunque, come già ricordato, t, al contrario di x, è un parametro. In teoria dei campi tutte e quattro le coordinate sono parametri.

 $^{^{17}}$ Un'interessante alternativa è proposta a pag. 956 del Kleinert, "Particles and Fields", dove nelle (14.202) e (14.203) è posto

$$\underline{\widetilde{\Gamma}_E^{(2)}(p)\widetilde{G}_{cE}^{(2)}(p)} = 1$$

Si ha

$$\Gamma_E^{(2)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \frac{\delta^2 \Gamma_E[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(\bar{x}_1) \delta \phi_{cl}(\bar{x}_2)} |_{\phi_{cl}=0} ,$$

е

$$G_{cE}^{(2)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = -\frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(\bar{x}_1)\delta J(\bar{x}_2)}|_{J=0}$$

L'azione effettiva euclidea è

$$\Gamma_E[\phi_{cl}] = Z_E[J] - \int d^4 \bar{x} J(\bar{x}) \frac{\delta Z_E[J]}{\delta J(\bar{x})} , \qquad (200)$$

dove

$$\phi_{cl}(\bar{x}) := -\frac{\delta Z_E[J]}{\delta J(\bar{x})} . \tag{201}$$

Di seguito mostriamo che la scelta del segno di $\Gamma_E[\phi_c]$ in (200) è quella naturale. Ciò offre anche l'occasione di commentare su alcuni segni nel testo di Ramond. In proposito si osservi che, consistentemente con la (3.4.7) e (3.4.32), nel testo di Ramond, $J(\bar{x})$ in Eq.(3.4.31) deve essere sostituita con $-J(\bar{x})$. Apparentemente, anche l'azione effettiva in Eq.(3.4.33) dovrebbe avere il segno opposto. Comunque, la (3.4.33) deriva dalla (3.4.31) una volta che si utilizzi la relazione (3.3.9)

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(x)} .$$
(202)

D'altronde tale relazione vale nel minkowskiano. Come nel caso della definizione di ϕ_{cl} , che cambia segno nell'euclideo ($\phi_{cl} = \delta_J Z[J]$ nel minkowskiano e $\phi_{cl} = -\delta_J Z_E[J]$ nell'euclideo), ciò consistentemente con $\phi_{cl} = \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_J$, ci si aspetta che nell'euclideo

$$J(\bar{x}) = \frac{\delta \Gamma_E[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(\bar{x})} .$$
(203)

Per stabilire che (203) è la scelta naturale, si noti che nel limite classico l'azione effettiva deve corrispondere all'azione classica calcolata sulla soluzione classica, sia nel minkowskiano che nell'euclideo. Da qui segue che la scelta giusta è proprio (203). Infatti, la (203), e non la (3.3.9) nel testo di Ramond, insieme con la (3.4.31) cambiata di segno, implica la (3.4.33), che quindi risulta corretta. È immediato verificare che la (200) implica la (203).

$$\frac{\delta\Gamma_E[\phi_{cl}]}{\delta\phi_{cl}(\bar{x})} = \int d^4\bar{z} \frac{\delta Z_E[J]}{\delta J(\bar{z})} \frac{\delta J(\bar{z})}{\delta\phi_{cl}(\bar{x})} + J(\bar{x}) - \int d^4\bar{z} \frac{\delta Z_E[J]}{\delta J(\bar{z})} \frac{\delta J(\bar{z})}{\delta\phi_{cl}(\bar{x})} = J(\bar{x}) \ .$$

Derivando (201) rispetto a $\phi_{cl}(\bar{y})$ si ha

$$\delta(\bar{x} - \bar{y}) = -\int d^4 \bar{z} \frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(\bar{x}) \delta J(\bar{z})} \frac{\delta J(\bar{z})}{\delta \phi_{cl}(\bar{y})}$$
$$= -\int d^4 \bar{z} \frac{\delta^2 Z_E[J]}{\delta J(\bar{x}) \delta J(\bar{z})} \frac{\delta^2 \Gamma_E[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(\bar{z}) \delta \phi_{cl}(\bar{y})} .$$
(204)

D'altronde, come mostra il primo membro, tale espressione è indipendente da J e da ϕ_{cl} . Calcolandolo a J = 0 si ha

$$\int d^4 \bar{z} G_{cE}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}) \frac{\delta^2 \Gamma_E[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(\bar{z}) \delta \phi_{cl}(\bar{y})} = \delta(\bar{x} - \bar{y})$$

Si noti che per J = 0 si ha $\phi_{cl}[J = 0] = \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_{J=0}$ che, nella maggioranza dei casi trattati, è tipicamente nullo. Quando $\phi_{cl}[J = 0] = 0$ si ha la relazione

$$\int d^4 \bar{z} G_{cE}^{(2)}(\bar{x}, \bar{z}) \Gamma_E^{(2)}(\bar{z}, \bar{y}) = \delta(\bar{x} - \bar{y}) ,$$

che è la trasformata di Fourier di

$$\tilde{\Gamma}_{E}^{(2)}(p)\tilde{G}_{cE}^{(2)}(p) = 1$$

Nel minkowskiano si ha

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)\tilde{G}^{(2)}_c(p)=i ,$$

conseguenza di (202), $\phi_{cl}=\delta Z/\delta J$ e

$$G_{c}^{(2)}(x,y) = -i\frac{\delta^{2}Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)}|_{J=0} , \qquad \Gamma^{(2)}(x,y) = \frac{\delta^{2}\Gamma[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)\delta \phi_{cl}(y)}|_{\phi_{cl}=0} .$$

$\Gamma[\varphi]$ all'ordine \hbar

Consideriamo l'azione effettiva nel minkowskiano. Abbiamo già mostrato che all'ordine \hbar^0 questa coincide con l'azione classica. Determiniamo ora il contributo all'ordine \hbar a Γ . Iniziamo osservando che, nello spirito della trasformata di Legendre, il campo ϕ_{cl} va visto come indipendente. L'equazione

del moto che soddisfa ϕ_{cl} non è altro che una relazione con la sorgente esterna J: variando ϕ_{cl} la sorgente J varia in modo determinato. In altre parole, ϕ_{cl} non ha alcun vincolo. Per questo, nel seguito, sopprimiamo il suffisso di ϕ_{cl} , ponendo

$$\varphi := \phi_{cl}$$
 .

Si noti che

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]\right) = W[J]\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\langle J\varphi\rangle\right) = \int D\tilde{\phi}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}[S[\tilde{\phi}] + \langle J(\tilde{\phi} - \varphi)\rangle]\right\}.$$

Definiamo un nuovo campo ϕ ponendo

$$\phi = \phi + \varphi$$
.

Poiché $D\tilde{\phi} = D\phi$, si ha

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}\Gamma[\varphi]\right) = \int D\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\phi+\varphi] - \langle\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi}\phi\rangle\right)\right] \,.$$

Se il potenziale è un polinomio di ordine n, allora

$$S[\phi + \varphi] = S[\varphi] + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} S_k[\varphi] \phi^k ,$$

dove

$$S_k[\varphi]\phi^k := \langle \frac{\delta^k S[\varphi]}{\delta\varphi(x_1)\dots\delta\varphi(x_k)}\phi(x_1)\cdots\phi(x_k)\rangle$$
.

Quindi,

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar}(\Gamma[\varphi] - S[\varphi])\right] = \int D\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} S_k[\varphi]\phi^k - \left\langle\left(\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi} - \frac{\delta S[\varphi]}{\delta\varphi}\right)\phi\right\rangle\right]\right\}.$$

Consideriamo l'espansione in serie di potenze di \hbar^{19}

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma_k[\varphi] \hbar^k .$$

Ricordando che $\Gamma_0[\varphi]=S[\varphi],$ si ha

$$\exp[i(\Gamma_1[\varphi] + O(\hbar))] = \int D\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} S_k[\varphi] \phi^k - \left\langle \left(\hbar \frac{\delta \Gamma_1[\varphi]}{\delta \varphi} + O(\hbar^2)\right) \phi \right\rangle \right]\right\}.$$
(205)

 $^{^{19}\}mathrm{Come}$ vedremo tra poco, il senso di tale espansione va precisato, aspetto che richiede un'analisi dimensionale.

Prima di proseguire consideriamo l'analisi dimensionale delle teorie scalari, in D dimensioni, con (densità) di potenziale

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{n!} \phi^n \; ,$$

in presenza di sorgente esterna J. La convenzione per la metrica nello spazio di Minkowski è (+, -, ..., -). Inoltre, $x^{\mu} = (x_0, x_1, ..., x_{D-1})$, $x_0 = ct$, $\partial_{\mu} = (\partial_0, \nabla)$, dove $\nabla = \partial_i = \partial/\partial x^i = -\partial^i = \partial/\partial x_i$, i = 1, ..., D - 1, denota il gradiente. Per il quadrimomento si ha $p^{\mu} = i\hbar\partial^{\mu} = (i\hbar\partial^0, -i\hbar\nabla)$. L'equazione del moto è

$$(\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \phi = J - \frac{\lambda}{(n-1)!} \phi^{n-1}$$
 (206)

Nel seguito consideriamo la forma più generale

$$\left(\hbar^{\alpha}\partial_{\mu}\partial^{\mu} + \frac{m^{2}c^{2}}{\hbar^{2-\alpha}}\right)\phi = J - \frac{\lambda}{(n-1)!}\phi^{n-1} , \qquad (207)$$

 $\forall \alpha \in \mathbb{R},$ che differisce dalla (206) per un rescaling del membro destro. Eq.(207) implica

$$[J] = L^{-2}[\hbar]^{\alpha}[\phi] , \qquad [\lambda][\phi]^{n-1} = [J] , \qquad [\phi]^{n-2} = L^{-2}[\lambda]^{-1}[\hbar]^{\alpha} . \tag{208}$$

La densità di lagrangiana associata a (207) è

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar^{\alpha}}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^{2-\alpha}} \phi^2 - \frac{\lambda}{n!} \phi^n + J\phi .$$
 (209)

Un aspetto cruciale della formulazione path integral è la presenza del termine \hbar che divide l'azione. Dobbiamo quindi richiedere che $S = \int d^D x \mathcal{L}$ abbia effettivamente le dimensioni di un'azione. Comunque, poiché le equazioni del moto rimangono invariate se si moltiplica \mathcal{L} per una qualsiasi costante, va osservato che ponendo

$$S = K \int d^D x \mathcal{L} \; ,$$

segue da Eq.(209) che

$$[K] = L^{2-D}[\hbar]^{1-\alpha}[\phi]^{-2} .$$
(210)

Insieme a 208, questa relazione implica

$$[K] = L^{\frac{n(2-D)+2D}{n-2}} [\hbar]^{\frac{n(1-\alpha)-2}{n-2}} [\lambda]^{\frac{2}{n-2}} .$$
(211)

Se richiediamo che K sia adimensionale, allora

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} = L^{\frac{n}{2}(D-2)-D} \begin{bmatrix} \hbar \end{bmatrix}^{\frac{n}{2}(\alpha-1)+1}, \ \begin{bmatrix} \phi \end{bmatrix} = L^{(2-D)/2} \begin{bmatrix} \hbar \end{bmatrix}^{(1-\alpha)/2}, \ \begin{bmatrix} J \end{bmatrix} = L^{-(D+2)/2} \begin{bmatrix} \hbar \end{bmatrix}^{(1+\alpha)/2}$$
(212)

Riassorbendo la dimensionalità in $[\hbar]$ di λ , $\phi \in J$

$$\lambda \rightarrow \hbar^{\frac{n}{2}(\alpha-1)+1}\lambda, \quad \phi \rightarrow \hbar^{(1-\alpha)/2}\phi, \quad J \rightarrow \hbar^{(1+\alpha)/2}J, \quad (213)$$

la densità di lagrangiana diventa

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar} \phi^2 - \hbar \frac{\lambda}{n!} \phi^n + \hbar J \phi . \qquad (214)$$

Si noti che tale espressione è immediatamente ottenibile da (209) richiedendo che $\int d^D x \mathcal{L}$ abbia le dimensioni di $\hbar \operatorname{con} \lambda$, $\phi \in J$ di dimensioni date solamente in termini di potenze di L.

Nel caso D = 4, n = 4 la (212) fornisce

$$[\lambda] = [\hbar]^{2\alpha - 1} , \quad [\phi] = L^{-1} [\hbar]^{(1 - \alpha)/2} , \quad [J] = L^{-3} [\hbar]^{(\alpha + 1)/2} .$$
(215)

Osserviamo che se $\alpha = 1$, allora

$$[\lambda] = [\hbar]$$
, $[\phi] = L^{-1}$, $[J] = L^{-3}[\hbar]$, (216)

mentre, per $\alpha = 0$, si ha

$$[\lambda] = [\hbar]^{-1}$$
, $[\phi] = L^{-1}[\hbar]^{1/2}$, $[J] = L^{-3}[\hbar]^{1/2}$. (217)

Poiché usualmente nella densità di lagrangiana si pone $\hbar = 1$, non c'è a priori alcun ovvio motivo per fare una scelta del valore di α . Comunque, il modo canonico di trattare i contributi in potenze di \hbar dell'azione effettiva è equivalente, anche se non sempre dichiarato esplicitamente, a scegliere $\alpha = 0$. Per esempio, a pag. 288 del testo di Itzykson e Zuber si considera, per n = 4, la (209) con $\alpha = 0$. Consideriamo quindi la (209) con $\alpha = 0$. Questa scelta suggerisce di riscalare $\phi \in J$ per un fattore $\hbar^{1/2}$, cioè sostituire nella densità di lagrangiana il campo ϕ con $\hbar^{1/2}\phi \in J$ con $\hbar^{1/2}J$. Quindi, dopo tale rescaling la (209) diventa, per $\alpha = 0$ e n = 4,

$$\mathcal{L} = \frac{\hbar}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar} \phi^2 - \hbar^2 \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + \hbar J \phi , \qquad (218)$$

dove ora

$$[\lambda] = [\hbar]^{-1}, \qquad [\phi] = L^{-1}, \qquad [J] = L^{-3}.$$
 (219)

In proposito c'è un'osservazione che, sebbene sia ovvia, è bene precisare, e cioè che il fatto che la costante d'accoppiamento abbia le dimensioni di \hbar^{-1} non implica che debba avere in sé un termine \hbar^{-1} .

Torniamo alla determinazione del contributo all'ordine \hbar , Γ_1 , di Γ . Si inizia con la densità di lagrangiana "classica"

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J\phi , \qquad (220)$$

che è la (209) con $\alpha = 0$. In tal caso le dimensioni di λ , $\phi \in J$, sono quelle riportate in Eq.(217). Come abbiamo visto, l'azione corrispondente, eccetto il termine $\langle J\phi \rangle$, scompare da (205). A questo punto si sceglie di riscalare la "fluttuazione quantistica" ϕ , eliminando la sua dimensionalità in \hbar . In proposito si noti che non va specificato il riscalamento di J, questo è fissato dall'equazione del moto $J = -\delta \Gamma[\varphi]/\delta \varphi$. Segue che la dipendenza di J da \hbar è completamente fissata dalla forma funzionale di Γ , quindi dalle potenze di \hbar nello sviluppo in serie di Γ .

Effettuando il rescaling $\phi \to \hbar^{1/2} \phi$, la (205) diventa²⁰

$$\exp[i(\Gamma_1[\varphi] + O(\hbar))] = \int D\phi \exp\left\{i\left[\sum_{k=2}^n \frac{\hbar^{\frac{k}{2}-1}}{k!} S_k[\varphi]\phi^k - \langle \left(\hbar^{1/2} \frac{\delta\Gamma_1[\varphi]}{\delta\varphi} + O(\hbar^{3/2})\right)\phi \rangle\right]\right\}$$
(221)

Si noti che l'esponente nell'integrando ha un termine quadratico dato da $iS_2[\varphi]\phi^2/2$. Per il nostro scopo è utile tenere tale termine all'esponente ed espandere in serie di potenze l'esponenziale del rimanente polinomio in ϕ . Ricordando che se $\Gamma[-\phi] = -\Gamma[\phi]$ allora $\int D\phi\Gamma[\phi] = 0$, si ha che i termini

 $^{^{20}}$ Poiché, come mostrato anche dalla (212), le dimensioni di ϕ sono fissate dal termine cinetico, possiamo effettuare lo stesso rescaling di ϕ per qualsiasi potenziale polinomiale.

con potenze semidispari di \hbar non contribuiscono, per cui^{21}

$$\exp[i(\Gamma_1[\varphi] + O(\hbar))] = \int D\phi \exp\left(\frac{i}{2}S_2\phi^2\right)(1 + O(\hbar)) , \qquad (222)$$

da cui

$$\Gamma_1[\varphi] = -i \log \int D\phi \exp\left(\frac{i}{2}S_2\phi^2\right) \,. \tag{223}$$

La determinazione del potenziale efficace V^e segue quella del Ramond e non la ripetiamo quì. In proposito si osservi che la precedente analisi è relativa alla formulazione minkowskiana, mentre il calcolo di V^e nel Ramond è fatta nell'euclideo. È comunque utile considerare l'analisi dimensionale di V^e . La sua espressione è riportata nella (3.5.23) del Ramond

$$V^{e}(\varphi) = \frac{1}{2} \frac{m^{2}}{\hbar^{2}} \varphi^{2} + \frac{\lambda}{4!} \varphi^{4} + \frac{\hbar}{64\pi^{2}} \left(\frac{m^{2}}{\hbar^{2}} + \frac{\lambda}{2} \varphi^{2}\right)^{2}$$
$$\times \left(-\frac{3}{2} + \log \frac{m^{2}/\hbar^{2} + \lambda \varphi^{2}/2}{\mu^{2}/\hbar^{2}}\right) + O(\hbar^{2}) , \qquad (224)$$

dove abbiamo sostituito $m^2 e \mu^2 \operatorname{con} m^2/\hbar^2 e \mu^2/\hbar^2$, rispettivamente. Come notato sopra, l'aggiunta del termine \hbar^2 tale è necessaria se non si considera \hbar adimensionale (abbiamo comunque usato unità c = 1). Si noti che φ è un campo classico, quindi non va effettuato il rescaling di ϕ sopra riportato. La dimensione di φ è $[\hbar]^{1/2}L^{-1}$, inoltre $[\lambda] = [\hbar]^{-1}$. Poiché $[m] = [\hbar]L^{-1}$, si verifica immediatamente che (224) è dimensionalmente consistente.

Dalla precedente analisi risulta chiaro che piuttosto che di espansione in potenze di \hbar di Γ , si tratta di considerare la dipendenza della struttura funzionale di Γ da \hbar . L'affermazione precisa è la seguente. Si consideri la densità

$$\int D\phi\phi(x_1)\cdots\phi(x_{2k+1})e^{iS_0}=0$$

equivalente al più generale $\int D\phi\Gamma[\phi] = 0$ quando $\Gamma[-\phi] = -\Gamma[\phi]$, mentre

$$\int D\phi\phi(x_1)\cdots\phi(x_{2k})e^{iS_0} = \frac{i^n}{2^n n!} \sum_{perm.} \Delta_F(x_{P_1} - x_{P_2})\cdots\Delta_F(x_{P_{2n-1}} - x_{P_{2n}}) \ .$$

²¹Si noti che nel caso in cui φ sia sostituito da una costante, il termine $iS_2[\varphi]\phi^2/2$ coinciderebbe con l'azione S_0 di una particella libera di massa quadra $m^2 + V''(costante)$. Si avrebbe quindi, in accordo con il teorema di Wick

di lagrangiana iniziale con c = 1. Sostituiamo m/\hbar con ν_m , considerato come parametro indipendente da \hbar . Sostituiamo quindi (220) con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi - \frac{1}{2} \nu_m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 + J \phi \; .$$

Successivamente riscaliamo il parametro μ , necessario nel calcolo del determinante che definisce Γ_1 , per il fattore \hbar^{-1} , per poi sostituire μ/\hbar con il parametro ν_{μ} . Sviluppiamo quindi l'azione effettiva che ne deriva in serie di potenze di \hbar ,

$$\Gamma[\varphi;\nu_m,\nu_\mu] = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k \Gamma_k[\varphi;\nu_m,\nu_\mu] \; .$$

Poiché $\Gamma[\varphi] = \Gamma[\varphi; m/\hbar, \mu/\hbar]$, si ha

$$\Gamma_k[\varphi] = \Gamma_k[\varphi; m/\hbar, \mu/\hbar] .$$

Concludiamo questa analisi con un'osservazione sull'equazione del moto che lega J e φ . Come ricordato questa è

$$J(x) = -\frac{\delta\Gamma[\varphi]}{\delta\varphi(x)} .$$
(225)

D'altronde, questa relazione tra $J \in \varphi$ è equivalente all'equazione di Schwinger-Dyson

$$J(x) = \left(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\varphi(x) + W^{-1}[J]V'\left(\frac{-i\delta}{\delta J(x)}\right)W[J] , \qquad (226)$$

corrispondente alla (3.3.26) del Ramond. Si noti che, denotando l'equazione del moto classica con

$$F[\varphi, J, V'(\varphi)] = 0$$
,

la (226) corrisponde a

$$W^{-1}[J]F[\varphi, J, V'(-i\delta_J)]W[J] = 0.$$

L'espressione (225) la si ottiene risolvendo la (226) con J considerata come funzione di φ . Ovviamente, ciò si può anche ottenere esprimendo prima φ in termini di J per poi determinare la relazione inversa.

Espansione in loops come espansione in \hbar

Abbiamo visto che in una teoria il campo ϕ ha dimensione $L^{-1}[\hbar]^{1/2}$. Di seguito connettiamo lo sviluppo in loops delle funzioni di Green con lo sviluppo in potenze di \hbar . Lo stesso argomento è valido per lo sviluppo dei funzionali generatori $W[J] \in Z[J]$. Anche in questo caso è necessario evitare di considerare il fattore \hbar della densità di lagrangiana dovuta al termine m^2c^2/\hbar^2 . Come mostrato precedentemente, dovremmo considerare un parametro ν_m che sostituisca mc/\hbar , considerare lo sviluppo in loops, mostrarne la corrispondenza con lo sviluppo in \hbar e alla fine sostituire ν_m con mc/\hbar . Sottintendiamo quindi questo passaggio, tralasciando il termine \hbar in mc/\hbar , ed usando unità c = 1. Consideriamo il propagatore libero

$$\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle = i\hbar \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$$
 (227)

Si noti che la variabile d'integrazione è d^4k piuttosto che d^4p . Inoltre, a denominatore compare k^2 invece di p^2 . Il termine \hbar a numeratore è dovuto al fatto che la dimensione del primo membro è $L^{-2}[\hbar]$.

Determiniamo ora, in una teoria con potenziale $\lambda \phi^n/n!$, la connessione tra numero di loops L, numero di vertici V e numero di linee interne I. Le linee interne devono soddisfare V-1 condizioni. V condizioni sono dovute al fatto che ad ogni vertice è associata la distribuzione

$$-i\frac{\lambda}{n!}(2\pi)^4\delta\Big(\sum_{k=1}^n p_k\Big)$$
,

che fissa la condizione di conservazione del momento. Comunque di queste V condizioni una è ridondante. Infatti, la prescrizione di Feynman richiede l'integrazione su tutti i momenti interni. Tale integrazione elimina tutte le δ , lasciandone una a fattore

$$(2\pi)^4 \delta \Big(\sum_{k=1}^E q_k\Big) ,$$

dove E è il numero di linee esterne. Si ha quindi che il numero di momenti interni indipendenti, cioè il numero di loops, è

$$L = I - (V - 1) \; .$$

Ad ogni vertice è associato un fattore \hbar^{-1} , proveniente dal termine $\exp(-\frac{i}{\hbar}\langle V(\phi)\rangle)$ nel path integral. Inoltre, ad ogni linea, cioè ad ogni propagatore libero, corrisponde, in accordo con (227), un termine \hbar . Quindi, un diagramma ha un fattore $\hbar^{I+E-V} = \hbar^{E+L-1}$. Segue che per ogni funzione di Green l'espansione in loops corrisponde all'espansione in potenze di \hbar .

Funzioni proprie di vertice

Come noto, nel calcolo delle ampiezze di scattering si assume che sia nel lontano passato che nel lontano futuro il campo interagente ϕ corrisponda ad un campo libero $\phi_{in} \in \phi_{out}$

$$\lim_{x_0 \to -\infty} \phi(x) = Z^{1/2} \phi_{\rm in}(x) \qquad \lim_{x_0 \to +\infty} \phi(x) = Z^{1/2} \phi_{\rm out}(x) ,$$

dove Z è la normalizzazione in

$$\langle 0|\phi(x)|1\rangle = Z^{\frac{1}{2}}\langle 0|\phi_{\rm in}(x)|1\rangle = Z^{\frac{1}{2}}\langle 0|\phi_{\rm out}(x)|1\rangle$$

Denotiamo con $|a, in\rangle$ $(|a, out\rangle)$ uno stato che al tempo $t = -\infty$ $(t = +\infty)$ sia nello stato $|a\rangle$. Consideriamo l'operatore unitario S definito dalla relazione

 $\langle \mathbf{f}, \mathrm{out} | \mathbf{i}, \mathrm{in} \rangle = \langle \mathbf{f}, \mathrm{in} | S | \mathbf{i}, \mathrm{in} \rangle$

dove i (f) sta ad indicare lo stato iniziale (finale). Si ha

$$\phi_{\rm in}(x) = S\phi_{\rm out}(x)S^{-1} ,$$

$$|{\rm i},{\rm in}\rangle = S|{\rm i},{\rm out}\rangle ,$$

$$\langle {\rm f},{\rm in}|S|{\rm i},{\rm in}\rangle = \langle {\rm f},{\rm out}|S|{\rm i},{\rm out}\rangle .$$

Consideriamo la formula di riduzione, già introdotta a lezione, dovuta a Lehmann, Symanzik e Zimmermann. Questa connette le ampiezze di transizione on-shell con le funzioni di Green (nel seguito ometteremo lo shift $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$)

$$\langle p_1, \ldots, p_n, \operatorname{out} | q_1, \ldots, q_m, \operatorname{in} \rangle = \langle p_1, \ldots, p_n, \operatorname{in} | S | q_1, \ldots, q_m, \operatorname{in} \rangle$$

= disconnected terms

+
$$(iZ^{-1/2})^{n+m} \int d^4 y_1 \dots d^4 x_m \exp\left[i\left(\sum_{1}^n p_j y_j - \sum_{1}^m q_k x_k\right)\right]$$

 $\times (\Box_{y_1} + m^2) \dots (\Box_{x_m} + m^2) \langle \Omega | T\phi(y_1) \dots \phi(x_m) | \Omega \rangle$. (228)

I termini disconnessi non contribuiscono nel caso in cui nessuno dei momenti iniziali coincida con uno dei momenti finali. Si noti che trattandosi di transizioni on-shell, nella precedente formula si ha $p_j^2 = m^2$, $j = 1, \ldots, n$ e $q_j^2 = m^2$, $j = 1, \ldots, m$. In particolare, esprimendo i correlatori in termini delle funzioni di Green nello spazio dei momenti, si ha che la parte connessa dell'ampiezza di transizione è

$$\langle p_1, \dots, p_n, \operatorname{out} | q_1, \dots, q_m, \operatorname{in} \rangle_c = (2\pi)^4 \delta \left(\sum p_j - \sum q_k \right) (-i)^{m+n} Z^{-(m+n)/2}$$

 $\times \lim_{p_j^2, q_k^2 \to m^2} \prod_{j=1}^n (p_j^2 - m^2) \prod_{k=1}^m (q_k^2 - m^2) \tilde{G}^{(m+n)}(p_1, \dots, p_n, -q_1, \dots, -q_m) .$

Quindi, la matrice S è proporzionale al prodotto dei residui della funzione di Green $\tilde{G}^{(m+n)}(p_1,\ldots,p_n,-q_1,\ldots,-q_m)$.²² Si osservi che poiché per $p^2 \sim m^2$ l'inverso del propagatore esatto ha l'andamento

$$1/\tilde{G}^{(2)}(p) \sim (iZ)^{-1}(p^2 - m^2)$$

si può anche scrivere

$$\langle p_1, \dots, p_n, \text{out} | q_1, \dots, q_m, \text{in} \rangle_c = (2\pi)^4 \delta \Big(\sum p_j - \sum q_k \Big) (-1)^{m+n} Z^{(m+n)/2}$$

 $\times G^{(m+n)}_{\text{trunc}}(p_1, \dots, p_n, -q_1, \dots, -q_m) |_{p_j^2 = q_k^2 = m^2} ,$
(229)

dove

$$\tilde{G}_{\text{trunc}}^{(N)}(p_1,\ldots,p_N) = \tilde{G}^{(N)}(p_1,\ldots,p_N) / \prod_{k=1}^N \tilde{G}^{(2)}(p_k) , \qquad N > 2 ,$$

è la cosidetta funzione di Green troncata, cioè con i propagatori esatti esterni rimossi. I diagrammi di Feynman nell'espansione diagrammatica delle funzioni di Green troncate sono detti anch'essi troncati.

Di grande interesse sono i diagrammi di Feynman corrispondenti ai diagrammi che oltre a essere *troncati*, sono anche *connessi* e rimangono tali anche se si taglia una qualsiasi linea interna. La proprietà di un diagramma connesso di rimanere tale anche dopo il taglio di una linea interna è detta *irriducibilità*

²²Da quanto detto segue che in qualche modo la quantità fisicamente rilevante delle funzioni di Green è costituita dal prodotto dei suoi residui. Questo aspetto è di considerevole rilevanza in quanto effettuando un diffeomorfismo dei campi le ampiezze rimangono invariate. Ciò non è del tutto sorprendente, in fondo nelle sezioni d'urto non compaiono direttamente i campi. Si veda in proposito la discussione a pag. 68 del testo di Zee, "*Quantum Field Theory in a Nutshell*", Princeton University Press, 2010, e pagg. 447-448 dell'Izykson-Zuber. Si consiglia anche la discussione at http://physics.stackexchange. com/questions/69828/equivalence-theorem-of-the-s-matrix.

ad una particella (1PI). A meno del fattore $(2\pi)^4 \delta(\sum p_k)$, le funzioni corrispondenti a tali diagrammi, denotate $\tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1,\ldots,p_N)$, sono dette funzioni proprie di vertice. Da quanto detto si ha quindi

$$\tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1,\ldots,p_N) = \left(\tilde{G}_c^{(N)}(p_1,\ldots,p_N) / \prod_{k=1}^N \tilde{G}^{(2)}(p_k)\right)|_{1PI} \,.$$

Si noti che, come nel caso di $\tilde{G}^{(N)}(p_1, \ldots, p_N)$, anche i momenti di $\tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1, \ldots, p_N)$ soddisfano la relazione $\sum_k p_k = 0$. Le $\Gamma^{(N)}(p_1, \ldots, p_N)$ rappresentano i blocchi fondamentali della formulazione perturbativa. Il motivo è che l'integrazione sui momenti interni di un dato diagramma può essere effettuata indipendentemente in ogni sottodiagramma corrispondente ad un contributo perturbativo alla funzione propria di vertice. Infatti una linea interna che tagliata disconnetta il diagramma corrisponde a togliere un fattore $(p^2 - m^2)^{-1}$, con p_{μ} che non va integrato, e quindi tale linea non può generare singolarità. Tale proprietà delle funzioni proprie di vertice è di particolare rilevanza nella procedura di rinormalizzazione poiché è necessario e sufficiente rendere finiti tali diagrammi per rendere finito l'intero diagramma. Concludiamo osservando che lo sviluppo in loops delle $\Gamma^{(N)}$ corrisponde a contributi di ordine \hbar^{L-1} .

Teorema di Jona-Lasinio: $\Gamma[\phi]$ come funzionale generatore delle $\Gamma^{(N)}$

Durante il corso abbiamo introdotto l'azione effettiva

$$\Gamma[\phi_{cl}] = Z[J] - \int d^D x J(x)\phi_{cl}(x) . \qquad (230)$$

Nel seguito dimostreremo un'importante risultato, dovuto a Giovanni Jona-Lasinio, e cioè che $\Gamma[\phi]$ è il funzionale generatore delle funzioni proprie di vertice $\Gamma^{(N)}$. La dimostrazione, considerata nel minkowskiano, adatta quella riportata nella sezione 21 del testo di Srednicki alla notazione utilizzata nel corso e contiene alcuni commenti aggiuntivi.

Iniziamo con il considerare alcuni semplici aspetti riguardanti $\Gamma[\phi_{cl}]$, utili per la successiva analisi. Prima di tutto osserviamo che nel caso di teoria libera si ha

$$Z[J] = Z_0[J] = -\frac{1}{2} \langle J \Delta_F J \rangle ,$$

dove

$$\Delta_F(y-x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \,,$$

è il propagatore di Feynman. La corrispondente azione effettiva è

$$\Gamma_0[\phi_{cl}] = Z_0[J] - \int d^D x J(x) \phi_{cl}(x) = \frac{1}{2} \langle \phi_{cl} \Delta_F^{-1} \phi_{cl} \rangle = -Z_0[J] , \quad (231)$$

dove si è usata la relazione

$$\phi_{cl}(x) := \frac{\delta Z_0[J]}{\delta J(x)} = -\int d^D y J(y) \Delta_F(y-x) \; .$$

 $\Delta_F^{-1}(y-x)$ denota l'inverso del propagatore di Feynman

$$\int d^D z \Delta_F^{-1}(x-z) \Delta_F(z-y) = \delta(x-y) \, ,$$

da cui

$$\Delta_F^{-1}(y-x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (p^2 - m^2 + i\epsilon) e^{ip(y-x)}$$

Si osservi che tale espressione è equivalente a

$$\Delta_F^{-1}(y-x) = (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\epsilon)\delta(y-x)$$

Come noto, l'inverso del propagatore di Feynman appare anche nell'espressione di $S_0[\phi]$, corrispondente alla parte cinetica dell'azione della teoria scalare

$$S_0[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x [\partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - (m^2 - i\epsilon) \phi^2(x)]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D y \phi(y) (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2 + i\epsilon) \delta(y - x) \phi(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D y \phi(y) \Delta_F^{-1}(y - x) \phi(x) . \qquad (232)$$

È interessante osservare che da (231) segue

$$\Gamma_0[\phi] = S_0[\phi] \; .$$

Il fatto che $\Gamma_0[\phi]$ corrisponda all'azione classica suggerisce la seguente questione. Che tipo di funzionale generatore otterremmo se, una volta determinata l'azione effettiva associata ad un'azione arbitraria $S[\phi]$, si sostituisse, nel path integral che definisce W[J], l'azione con $\Gamma[\phi]$? Come vedremo tra poco, questa sostituzione è utilizzata proprio per mostrare che $\Gamma[\phi]$ è il funzionale generatore delle $\Gamma^{(N)}$. Nel seguito introdurremo un funzionale generatore $\Gamma'[\phi]$ per le $\Gamma^{(N)}$ e mostreremo che questo coincide con l'azione effettiva, cioè

$$\Gamma'[\phi] = \Gamma[\phi]$$
.

Si consideri la funzione di Green a due punti esatta e connessa nel minkowskiano

$$G_c^{(2)}(y-x) = i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{e^{ip(y-x)}}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}$$

Si osservi che $\hat{\Delta}_c(y-x) := -iG_c^{(2)}(y-x)$ si riduce, nel caso libero, dove la self-energy $\Sigma(p^2)$ è nulla, al propagatore di Feynman. Definiamo, sempre nel minkowskiano, il funzionale

$$\Gamma'[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \int d^D y \phi(y) \hat{\Delta}_c^{-1}(y-x) \phi(x) + \sum_{N=3}^{\infty} \frac{1}{N!} \int d^D x_1 \dots \int d^D x_N \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \phi(x_1) \cdots \phi(x_N)$$
(233)

dove

$$\hat{\Delta}_c^{-1}(y-x) = \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} (p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon) e^{ip(y-x)} ,$$

e $\Gamma^{(N)}(x_1,\ldots,x_N)$ è la trasformata di Fourier di $(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_k p_k) \tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1,\ldots,p_N)$, quindi

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(\sum_k p_k) \tilde{\Gamma}^{(N)}(p_1, \dots, p_N) = \int \left(\prod_{k=1}^N d^4 x_k e^{ip_k \cdot x_k}\right) \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \, d^4 x_k e^{ip_k \cdot x_k} \, d^4 x_k$$

Il punto chiave è considerare un nuovo funzionale generatore con azione $\Gamma'[\phi]$

$$W_{\Gamma'}[J] = \exp(iZ_{\Gamma'}[J]) = \int D\phi \exp[i(\Gamma'[\phi] + \int d^D x J(x)\phi(x))] .$$

L'espansione perturbativa del funzionale generatore $Z_{\Gamma'}[J]$ corrisponde alla somma infinita di tutti i diagrammi di Feynman connessi con sorgente. Il propagatore è ora quello esatto della teoria originaria $\hat{\Delta}_c(y-x)$. Per ogni N, $\Gamma^{(N)}$ corrisponde ad un vertice che contribuisce con il fattore $-\frac{i}{N!}\Gamma^{(N)}$. In un diagramma che contribuisce a $Z_{\Gamma'}[J]$, le estremità del propagatore possono essere connesse a vertici e/o alla sorgente J. Un'analisi dell'espansione diagrammatica mostra che, con tali regole di Feynman, il funzionale generatore originario Z[J] corrisponde ai soli contributi ad albero che contribuiscono a $Z_{\Gamma'}[J]$. È utile tener presente che se nella densità di lagrangiana è assente il termine ϕ^N , allora, a livello ad albero, cioè all'ordine \hbar^{-1} , $\Gamma^{(N)}$ è nullo. Così, per esempio, nella teoria $\frac{\lambda}{4!}\phi^4$, i vertici $\Gamma^{[N]}$, N > 4, sono nulli all'ordine ad albero.

Nel seguito determiniamo il contributo ad albero a $Z_{\Gamma'}[J]$. A tal fine introduciamo un parametro adimensionale, \hbar' , nel seguente modo

$$W_{\Gamma',\hbar'}[J] = \exp(iZ_{\Gamma',\hbar'}[J]) = \int D\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar'} \Big(\Gamma'[\phi] + \int d^D x J(x)\phi(x)\Big)\right] \,.$$

Utilizzando il formalismo di Schwinger, possiamo esprimere $W_{\Gamma',\hbar'}[J]$ nella forma (la costante di normalizzazione è omessa)

$$W_{\Gamma',\hbar'}[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar'}\sum_{N=3}^{\infty} \langle \Gamma^{(N)} \left[-i\hbar' \frac{\delta}{\delta J} \right] \rangle \right) \exp(iZ_{0,\Gamma,\hbar'}[J]) , \qquad (234)$$

dove

$$Z_{0,\Gamma',\hbar'}[J] = -\frac{1}{2} \langle \frac{J(x)}{\hbar'} \hbar' \hat{\Delta}_c(x-y) \frac{J(y)}{\hbar'} \rangle ,$$

e $\langle \Gamma^{(N)}[\phi] \rangle := \langle \Gamma^{(N)}(x_1, \ldots, x_N) \phi(x_1) \ldots \phi(x_N) \rangle$. Espandendo in serie di potenze il primo esponenziale nel secondo membro di (234) e agendo su $\exp(iZ_{0,\Gamma,\hbar'}[J])$, si verifica immediatamente che, in un dato diagramma, connesso o disconnesso, ogni vertice ed ogni sorgente esterna J contribuisce con un fattore ${\hbar'}^{-1}$, mentre ogni propagatore contribuisce con un fattore ${\hbar'}$. Se P è il numero di propagatori in un dato diagramma, E il numero di sorgenti e V il numero di vertici, allora tale diagramma ha un fattore ${\hbar'}^{P-E-V}$. Si noti che se si rimuovono le sorgenti, allora E corrisponde al numero di gambe esterne di un dato diagramma. Poiché il numero di loops L di un diagramma con sorgenti è lo stesso di quello di un diagramma con le sorgenti rimosse, possiamo concludere che, nel caso di diagrammi connessi, vale la relazione P - E - V = L - 1, già derivata nel caso di diagrammi connessi con gambe esterne. Si consideri l'espansione

$$Z_{\Gamma',\hbar'}[J] = \sum_{L=0}^{\infty} {\hbar'}^{L-1} Z_{\Gamma',L}[J] .$$

Da quanto detto segue

$$Z[J] = Z_{\Gamma',L=0}[J] . (235)$$

D'altronde,

$$W_{\Gamma',\hbar'}[J] = \exp\left[\frac{i}{\hbar'}(\Gamma'[\phi_J] + \int d^D x J(x)\phi_J(x)) + \mathcal{O}({\hbar'}^0)\right], \qquad (236)$$

dove ϕ_J è soluzione dell'equazione del moto

$$\frac{\delta\Gamma'[\phi]}{\delta\phi(x)} = -J(x) \ . \tag{237}$$

Confrontando (235) con (236) si ha

$$Z[J] = \Gamma'[\phi_J] + \int d^D x J(x)\phi_J(x) , \qquad (238)$$

da cui segue

$$\phi_{cl}(x) := \frac{\delta Z[J]}{\delta J(x)} = \int d^D y \frac{\delta \Gamma'[\phi_J]}{\delta \phi_J(y)} \frac{\delta \phi_J(y)}{\delta J(x)} + \phi_J(x) + \int d^D x J(y) \frac{\delta \phi_J(y)}{\delta J(x)} \,.$$

Poiché ϕ_J è soluzione dell'equazione del moto (237), questa relazione si riduce a

$$\phi_{cl} = \phi_J \; .$$

Da (238) segue che Γ' calcolato in ϕ_{cl} è la trasformata di Legendre di Z[J],cioè

$$\Gamma'[\phi_{cl}] = Z[J] - \int d^D x J(x) \phi_{cl}(x) ,$$

e da (230) segue

$$\Gamma'[\phi] = \Gamma[\phi]$$
.

Sulle regole di Feynman

Le regole di Feynman seguono dal teorema di Wick. Queste sono ottenibili anche dalla formulazione path $\rm integral^{23}$

$$W[J] = \exp\left(-\int d^D x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) \int D\phi \exp\left(-S_0 + \int d^D x J(x)\phi(x)\right) \,,$$

dove S_0 è l'azione libera. D'altronde, come visto, uno shift del campo ϕ permette di riscrivere il precedente path integral in termini del propagatore di Feynman. Si ha quindi

$$W[J] = \exp\left(-\int d^D x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right) \exp\left(\frac{1}{2}\langle J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\rangle\right) \,.$$

 $^{23}\mathrm{Nel}$ seguito omettiamo le costanti di normalizzazione.

Espandendo in serie di potenze l'esponenziale exp $\left(-\int d^D x V\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right)$ si ottiene l'espressione di W[J] in termini di serie di potenze nella costante d'accoppiamento. Da tale sviluppo risulta una corrispondenza, ad ogni ordine nella costante d'accoppiamento, tra le espressioni e i modi possibili di costruire i diagrammi in termini di una linea, associato al propagatore di Feynman, e di un vertice, associato alla costante d'accoppiamento. Tale corrispondenza è generale e si applica, in particolare, alle funzioni di Green. Nello spazio dei momenti, la linea è associata al propagatore libero $(p^2 + m^2)^{-1}$ ed il vertice al fattore $-\lambda/4!$. La corrispondenza tra il termine $-\frac{\lambda}{4!}\int d^D x \phi^4(x)$ e il vertice $-\lambda/4!$ è un caso particolare di una regola generale: ogni termine $c_n \int d^D x \phi^n(x)$ in -S, con S l'azione, corrisponde al "vertice" c_n . In particolare, anche il termine quadratico $c_2 \int d^D x \phi^2(x)$, come lo è il termine di massa $-\frac{1}{2}m^2 \int d^D x \phi^2(x)$ in -S, può esser visto come vertice a due gambe.²⁴ In proposito, lo stesso termine di massa in W[J] è ottenibile agendo con exp $\left(-\frac{m^2}{2}\int d^D x \frac{\delta^2}{\delta J^2(x)}\right)$ su exp $\left(\frac{1}{2}\langle J(x)\Delta_{F0}(x-y)J(y)\rangle\right)$, dove $\Delta_{F0}(x-y)$ è il propagatore di Feynman massless. A livello di sviluppo perturbativo relativo al propagatore di Feynman, tale interpretazione corrisponde allo sviluppo diagrammatico

$$\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}(-m^2)\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2}(-m^2)\frac{1}{p^2}(-m^2)\frac{1}{p^2} + \ldots = \frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-m^2}{p^2}\right)^k = \frac{1}{p^2 + m^2}$$

Si noti che il vertice in questione è $-m^2/2$. L'assenza del fattore 1/2 nella precedente espressione è dovuta al fatto che vi sono due modi di congiungere le gambe esterne, tutte e due corrispondenti a $1/p^2$ alle due gambe del vertice. Un altro utile esempio dell'applicazione delle regole di Feynman riguarda la funzione propria di vertice $\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1,\ldots,p_4)$ nel caso di ϕ^4 . All'ordine più basso tale funzione corrisponde al termine $-\lambda$. Utilizzando la prescrizione di Ramond, pag. 105, la regola di Feynman per il vertice, corrispondente a $-\lambda/4!$, da un termine $-\lambda$, ottenuto moltiplicando $-\lambda/4!$ per il numero di modi di assegnare i 4 momenti entranti nel vertice, pari a 4!. Si noti che la stessa procedura di conteggio viene poi eseguita nel calcolo dei grafici successivi. In proposito è necessario tener presente che ognuno dei tre grafici a one-loop che contribuiscono a $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ (si veda pag. 107 nel testo di Ramond) è ottenuto nel seguente modo. Prima si fissano due coppie di etichette dei 4 momenti esterni, diciamo 1,2 e 3,4. Si contano i modi di associare le due etichette 1,2, alle 4 gambe di un vertice. Questi sono 4×3 . Lo stesso ragionamento lo si applica nel caso delle etichette 3.4 da associare al secondo vertice (considerato indistinguibile dal primo, per cui la loro permutazione

 $^{^{24}}$ Si noti peraltro che nel caso unidimensionale, quella temporale, tale termine corrisponde effettivamente ad un potenziale, quello armonico.

non deve essere conteggiata con un fattore 2). Ciò identifica il fattore di simmetria $(4 \times 3)^2$ a cui va aggiunto un ulteriore fattore 2 dovuto ai due modi possibili di far corrispondere, tramite propagatori, le 4 gambe senza etichetta dei due vertici. Il fattore overall corrispondente ad ognuno dei 3 diagrammi a one-loop di $\tilde{\Gamma}^{(4)}$ risulta quindi

$$\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2 (4\times3)^2 \times 2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

Oltre a ciò si devono aggiungere i diagrammi che differiscono per la coppia dei momenti entranti in ciascun vertice, quindi oltre al grafico con momenti $(p_1, p_2; p_3, p_4)$, vanno considerati quelli con momenti $(p_1, p_3; p_2, p_4)$ e $(p_1, p_4; p_2, p_3)$.

Quanto sopra detto è utile per considerare la scelta nel testo di Ramond nell'assegnare la regola di Feynman per i controtermini. Mentre nel caso del vertice il testo sceglie il termine $-\lambda/4!$, in accordo con la scelta generale di assegnare il vertice c_n al termine $c_n \int d^D x \phi^n(x)$ in $\exp(-S)$, nel caso dei controtermini l'assegnazione del vertice nella regola di Feynman corrisponde alla scelta $n!c_n$. È quindi necessario tener conto di questa scelta nella determinazione dei fattori di simmetria dei grafici contenenti i vertici associati ai controtermini, reinserendo un fattore 1/n! per i vertici ai controtermini. Il primo esempio corrisponde al controtermine

$$\frac{m^2}{4}\hat{\lambda}\Big(\frac{1}{\epsilon}+F_1(\epsilon,\hat{m}^2)\Big)\phi^2 ,$$

necessario per assorbire la divergenza, nel limite $\epsilon \to 0$, del tadpole. L'associata regola di Feynman utilizzata dal Ramond è data dal vertice

$$-\frac{m^2}{2}\hat{\lambda}\left(\frac{1}{\epsilon}+F_1(\epsilon,\hat{m}^2)\right)\,,$$

mentre la scelta consistente con la scelta $-\lambda/4!$, sarebbe stata

$$-\frac{m^2}{4}\hat{\lambda}\left(\frac{1}{\epsilon}+F_1(\epsilon,\hat{m}^2)\right)$$
.

Tutti i controtermini considerati nel testo di Ramond hanno $n!c_n$ come regola di Feyman per il vertice corrispondente al termine $c_n \int d^D x \phi^n(x)$ in $\exp(-S)$.

$\tilde{\Gamma}_E^{(2)}$ a one-loop con il contributo del controtermine

Come mostrato precedentemente, si ha $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}\tilde{G}_{cE}^{(2)} = 1$. Subito prima della (4.5.5) nel testo di Ramond si ricorda l'espressione errata $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}\tilde{G}_{cE}^{(2)} = -1$

già menzionata in precedenza nel testo. Comunque, successivamente, e in particolare nell'espressione per $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}$, viene utilizzata la relazione corretta, cioè senza il segno meno. Va altresì sottolineato che i grafici nella (4.5.5) si riferiscono a $\tilde{G}_{cE}^{(2)}$ e non a $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}$. Di seguito riproduciamo i passaggi che portano alla $\tilde{\Gamma}_E^{(2)}$. Si ha

$$\tilde{G}_{cE}^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 + m^2} + \frac{1}{(p^2 + m^2)^2} m^2 \frac{\hat{\lambda}}{2} \Big[\frac{1}{\epsilon} + \psi(2) - \log \hat{m}^2 + \mathcal{O}(\epsilon) - \Big(\frac{1}{\epsilon} + F_1(\epsilon, \hat{m}^2) \Big) \Big]$$

Quindi

$$\tilde{\Gamma}_E^{(2)}(p) = \left\{ \frac{1}{p^2 + m^2} \left[1 + \frac{m^2}{p^2 + m^2} \frac{\hat{\lambda}}{2} (\psi(2) - \log \hat{m}^2 - F_1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \right] \right\}^{-1}.$$

Poiché siamo interessati allo sviluppo perturbativo in $\lambda,$ possiamo utilizzare $(1-x)^{-1}\sim 1+x$

$$\tilde{\Gamma}_{E}^{(2)}(p) = p^{2} + m^{2} \left[1 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\psi(2) - \log \hat{m}^{2} - F_{1}) \right]$$

corrispondente all'espressione riportata nel testo di Ramond.

Relazione tra le funzioni proprie di vertice rinormalizzate e nude

Seguendo il testo di Ramond, poniamo $\omega = D/2$ e

$$\phi_0 = Z_\phi^{1/2} \phi$$

Inoltre, come riportato in Eq.(4.5.27) nel testo di Ramond, si ha

$$\lambda_0 = \lambda \mu^{2\epsilon} \frac{1+C}{(1+A)^2}$$

Si noti che, mentre $\lambda = \lambda_{\text{new}} = \lambda_{\text{old}} \mu^{-2\epsilon}$ è adimensionale, λ_0 ha le dimensioni di $\mu^{2\epsilon}$. L'espressione iniziale della densità di lagrangiana in D dimensioni è

$$\mathcal{L}(\phi, m, \lambda_{\text{old}}) = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_{\text{old}}}{4!}\phi^4 = \frac{1}{2}\partial_{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi + \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\mu^{2\epsilon}\phi^4$$

Sia

$$\mathcal{L}_{\rm ren}(\phi, m, \lambda_{\rm old}) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial_\mu \phi_0 + \frac{m_0^2}{2} \phi_0^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4$$

la densità di lagrangiana rinormalizzata, e

$$S_{\rm ren}[\phi_0] = \int d^{2\omega} x \mathcal{L}_{\rm ren}(\phi, m, \lambda_{\rm old}) ,$$

l'azione rinormalizzata. Un aspetto cruciale della rinormalizzazione è la relazione

$$\mathcal{L}_{ren}(\phi, m, \lambda_{old}) = \mathcal{L}(\phi_0, m_0, \lambda_0)$$
.

Si noti, in particolare, che è λ_{old} e non $\lambda = \lambda_{new}$ ad essere sostituito da λ_0 . Come segue dalla procedura di rinormalizzazione, al fine di ottenere le funzioni di Green rinormalizzate (cioè finite), è necessario considerare il funzionale generatore (anche in questo caso tralasciamo le costanti di normalizzazione)

$$W_{\rm ren}[J] = \int D\phi \exp(-S_{\rm ren}[\phi_0] + \int d^{2\omega}x J(x)\phi(x)) \ .$$

In proposito va sottolineato che la misura è $D\phi$, non $D\phi_0$, e l'interazione con la sorgente è tramite il campo ϕ , non ϕ_0 . In particolare, mentre la Jacobiana nel cambio di misura tra $D\phi$ e $D\phi_0$ corrisponde ad un termine costante che può essere assorbito dalla normalizzazione, la presenza del campo ϕ piuttosto che di ϕ_0 nell'interazione con la sorgente è una differenza sostanziale. Le funzioni di Green rinormalizzate sono²⁵

$$G_{\rm ren}^{(N)}(\{x_k\}; m, \lambda, \mu, \epsilon) = \frac{1}{W_{\rm ren}[0]} \frac{\delta^N W_{\rm ren}[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)}|_{J=0} ,$$

dove $\epsilon = 2 - \omega = (4 - D)/2$. Si noti che, come specificato dagli argomenti di $G_{\rm ren}^{(N)}$, stiamo considerando la dipendenza di $G_{\rm ren}^{(N)}$ dai parametri $m, \lambda, \mu \in \epsilon$. Questi possono essere esplicitati in $S_{\rm ren}$, utilizzando le espressioni di Z_{ϕ}, m_0 e λ_0 in termini di tali parametri. Poiché $J\phi_0 = (Z_{\phi}^{1/2}J)\phi$, si ha

$$G_{\rm ren}^{(N)}(\{x_k\}; m, \lambda, \mu, \epsilon) = \frac{1}{W_0[0]} \frac{\delta^N W_0[J]}{\delta(Z_{\phi}^{1/2} J(x_1)) \dots \delta(Z_{\phi}^{1/2} J(x_N))} |_{J=0} , \quad (239)$$

dove $W_0[J]$ differisce da $W_{\rm ren}[J]$ solo per il termine d'interazione tra il campo e la sorgente

$$W_0[J] = \int D\phi \exp(-S_{\rm ren}[\phi_0] + \int d^{2\omega}x J(x)\phi_0(x)) \ .$$

 $^{^{25}}$ L'analisi che segue si estende immediatamente al caso delle funzioni di Green connesse.

Come sopra detto la misura $D\phi$ può essere sostituita con $D\phi_0$, assorbendo la Jacobiana nella costante di normalizzazione. Possiamo quindi porre

$$W_0[J] = \int D\phi_0 \exp(-S_{\rm ren}[\phi_0] + \int d^{2\omega} x J(x)\phi_0(x)) \; .$$

Essendo ϕ_0 una variabile d'integrazione, $W_0[J]$ corrisponde al funzionale generatore della teoria iniziale, eccetto per la massa m e la costante d'accoppiamento λ_{old} , ora sostituite da $m_0 \in \lambda_0$, rispettivamente. Quindi

$$\frac{1}{W_0[J]} \frac{\delta^N W_0[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_N)} |_{J=0} = G^{(N)}(\{x_k\}; m_0, \lambda_0, \epsilon) , \qquad (240)$$

dove $G^{(N)}(\{x_k\}; m_0, \lambda_0, \epsilon)$ è la funzione di Green ottenuta dalla teoria iniziale, ma con $m \in \lambda_{\text{old}}$ sostituite da $m_0 \in \lambda_0$. Quindi, se si considerano $m_0 \in \lambda_0$ come variabili indipendenti, allora $G^{(N)}(\{x_k\}; m_0, \lambda_0, \epsilon)$ è divergente per $\epsilon \to 0$, nello stesso modo in cui $G^{(N)}(\{x_k\}; m, \lambda_{\text{old}}, \epsilon)$ è divergente per $\epsilon \to 0$ se $m \in \lambda_{\text{old}}$ sono considerate variabili indipendenti.

Dalle espressioni (239) e (240) segue la relazione

$$G^{(N)}(\{x_k\}; m_0, \lambda_0, \epsilon) = Z_{\phi}^{N/2} G_{\text{ren}}^{(N)}(\{x_k\}; m, \lambda, \mu, \epsilon) .$$

Ricordando che le $\tilde{\Gamma}^{(N)}$ corrispondono alle funzioni di Green connesse 1PI, con l'eliminazione degli N propagatori esatti relativi alle gambe esterne, si ha, nello spazio dei momenti

$$\tilde{\Gamma}^{(N)}(\{p_k\}; m_0, \lambda_0, \epsilon) = Z_{\phi}^{-N/2} \tilde{\Gamma}^{(N)}_{\text{ren}}(\{p_k\}; m, \lambda, \mu, \epsilon) ,$$

corrispondente alla relazione (4.5.30) nel testo di Ramond.

Si noti che le precedenti relazioni per le funzioni di Green e di vertice, implicano una relazione tra i parametri nudi m_0 , $\lambda_0 \in m$, λ , μ . Il passaggio dai due gradi di libertà agli apparenti tre gradi di libertà implica una dipendenza dalla scala μ sia di m che di λ . Si ha quindi

$$\lambda_0 = f_{\lambda_0}(\lambda(\mu), m(\mu), \mu, \epsilon) , \qquad m_0 = f_{m_0}(\lambda(\mu), m(\mu), \mu, \epsilon) .$$
 (241)

Risulta comunque chiaro per costruzione che sia m_0 che λ_0 sono indipendenti da μ . Ciò significa che la loro derivata totale rispetto a μ deve esser nulla

$$\mu \frac{d\lambda_0}{d\mu} = 0 , \qquad \mu \frac{dm_0}{d\mu} = 0 , \qquad (242)$$
$$\mu \frac{d}{d\mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu}|_{\lambda,m} + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial}{\partial \lambda}|_{m,\mu} + \mu \frac{dm}{d\mu} \frac{\partial}{\partial m}|_{\lambda,\mu} ,$$

dove si è sottolineato che le derivate parziali rispetto ad ognuna delle tre variabili devono esser calcolate con le altre due considerate come costanti. Nella prescrizione di 't Hooft e Weinberg le parti finite dei controtermini sono indipendenti da m. Ne segue che la dipendenza da μ delle parti finite è dovuta solamente alla loro dipendenza da $\lambda(\mu)$. Ricordando le definizioni

$$\lambda_0 = \lambda \mu^{2\epsilon} (1+C) Z_{\phi}^{-2} = \mu^{2\epsilon} g_{\lambda_0}(\lambda(\mu), \epsilon) , \quad m_0^2 = m^2 (1+B) Z_{\phi}^{-1} = m^2 g_{m_0}(\lambda(\mu), \epsilon)$$

si ha che le equazioni (242) si riducono a

$$2\epsilon g_{\lambda_0} + \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial g_{\lambda_0}}{\partial \lambda} = 0 ,$$

$$\mu \frac{dm^2}{d\mu} g_{m_0} + m^2 \mu \frac{d\lambda}{d\mu} \frac{\partial g_{m_0}}{\partial \lambda} = 0 .$$

Poiché

$$\beta(\lambda,\epsilon) = \mu \frac{d\lambda}{d\mu}$$
, $\gamma_m(\lambda,\epsilon) = \frac{1}{2}\mu \frac{d\log m^2}{d\mu}$

segue che

$$\beta(\lambda,\epsilon) = -2\epsilon \left(\frac{\partial \log g_{\lambda_0}}{\partial \lambda}\right)^{-1}, \qquad (243)$$

,

е

$$\gamma_m(\lambda,\epsilon) = -\frac{1}{2}\beta(\lambda,\epsilon)\frac{\partial\log g_{m_0}}{\partial\lambda} .$$
(244)

In particolare,

$$\gamma_m(\lambda,\epsilon) = \epsilon \frac{\partial \log g_{m_0}}{\partial \lambda} \left(\frac{\partial \log g_{\lambda_0}}{\partial \lambda}\right)^{-1} \,. \tag{245}$$

$\tilde{\Gamma}^{(n)}_{\rm ren}$ scaling and anomalous dimension

In the following we show the explicit steps from (4.6.28) of the Ramond book

$$\left[-s\frac{\partial}{\partial s}+\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial \lambda}+(\gamma_m(\lambda)-1)m\frac{\partial}{\partial m}+d_n-n\gamma_d(\lambda)\right]\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{sp_k\};m,\lambda,\mu)=0,$$
(246)

 $d_n = 4 - n$, to (4.6.31) that expresses a scaling property of $\tilde{\Gamma}_{ren}^{(n)}$. The proof of (4.6.31) uses an adaptation of the method of the characteristic curves that reduces a linear, or quasilinear²⁶, partial differential equation to

²⁶A quasilinear PDE corresponds to (247) with a_k and b also depending on u itself, that is (247) with the substitutions $a_k(\mathbf{x}) \to a_k(\mathbf{x}, u), b(\mathbf{x}) \to b(\mathbf{x}, u)$.

a system of first order differential equations. An excellent reference for this method is the text by Courant and Hilbert, *Methods of Mathematical Physics II*, pp. 28-32.

Consider the linear PDE

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(\mathbf{x}) u_{x_k} + b(\mathbf{x}) u = 0 .$$
 (247)

Denote the initial condition for u in the form

$$h(\mathbf{x}, u)|_{\mathbf{x}\in M} = 0 , \qquad (248)$$

where M is a codimension one subspace of \mathbb{R}^n . Let us consider the coordinate transformation $(x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow (s, t_1, \ldots, t_{n-1})$, and consider the functions $f_k, k = 1, \ldots, n$, defined by

$$x_k = f_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}) . (249)$$

The idea underlying the method of characteristic curves is based on the observation that imposing

$$\frac{dx_k}{ds} = a_k(\mathbf{x}) , \qquad (250)$$

 $k = 1, \ldots, n$, it follows that the total derivative of u

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial s} + \sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{dx_k}{ds} \frac{\partial u}{\partial x_k} , \qquad (251)$$

coincides with the left hand side of (247). It follows that (247) is equivalent to the ODE (250) together with

$$\frac{du}{ds} + b(\mathbf{x})u = 0 . (252)$$

The other key point is to impose that the values of \mathbf{x} defining M correspond to s = 0, that is

$$(x_k)|_M = f_k(0, t_1, \dots, t_{n-1})$$
, (253)

k = 1, ..., n. Such conditions on the $f_k(0, t_1, ..., t_{n-1})$ fix, together with (250), the coordinate transformation, that is the $f_k(s, t_1, ..., t_{n-1})$. Equation (248) becomes

$$h(\{f_k(0, t_1, \dots, t_{n-1})\}, v(0)) = 0 , \qquad (254)$$

where

$$v(s) := u(f_1(s, t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, f_n(s, t_1, \dots, t_{n-1})) .$$
(255)

For each fixed set of values of t_1, \ldots, t_{n-1} , the solution

$$g_k(s) := f_k(s, t_1, \dots, t_{n-1}) ,$$
 (256)

 $k = 1, \ldots, n$ of the system given by (250) corresponds to a curve, called characteristic curve, parametrized by s that, as follows by (253), originates in M. Different values of t_1, \ldots, t_{n-1} correspond to different characteristic curves.

Summarizing, the PDE (247), together with the initial condition (248), is equivalent to

$$v(s) = v(0) \exp\left(-\int_0^s ds' b(\{g_k(s')\})\right), \qquad (257)$$

$$\frac{dg_k(s)}{ds} = a_k(\{g_k(s)\}) , \qquad (258)$$

$$M = \{g_k(0) | t_1, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}^{n-1}\} .$$
(259)

The second and third equations fix the set $\{g_k\}$, and therefore $\{f_k\}$. The solution of (247), satisfying the initial condition (248), then follows by expressing s, t_1, \ldots, t_{n-1} in v(s) in terms of x_1, \ldots, x_n . A simple example is the PDE

$$\left(a(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,t)\frac{\partial}{\partial t} + c(x,t)\right)u(x,t) = 0 , \qquad x \in \mathbb{R} , \quad t \ge 0 , \quad (260)$$

with initial condition

$$u(x,0) = f(x)$$
 . (261)

Consider a new pair of coordinates, $s \ge 0$ and $\tau \in \mathbb{R}$, and denote by s and τ the characteristic coordinates, imposing that the coordinate transformation be invertible. We have

$$\frac{du}{ds} = \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) = \left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,t) .$$
(262)

Setting

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t) , \qquad \frac{dt}{ds} = b(x,t) , \qquad (263)$$

implies that the ODE

$$\frac{du}{ds} + c(x,t)u = 0 , \qquad (264)$$

corresponds, together with (263), to (260). Both (260) and (264) are constrained by the initial condition (261). Eq.(264) must be interpreted as an

 $^{^{27}}s, t_1, \ldots, t_{n-1}$ are called characteristic coordinates.

ODE for the function $f_{\tau}(s) = u(x(s,\tau), t(s,\tau))$ considered at fixed τ . Different values of τ define different functions $f_{\tau}(s)$. In other words, τ plays the role of modulo of the functional structure of u in (264). Therefore, for each fixed value τ_0 of τ , the equation (264) corresponds to equation (260) *restricted* to the curve

$$\gamma_{\tau_0}(s) := \{ [x(s,\tau_0), t(s,\tau_0)] | 0 \le s < \infty \} ,$$

so that

$$\{\gamma_{\tau}(s)|\tau \ge 0\}$$

is the set of characteristic curves associated to (260). As an explicit example we consider the equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} + 2\right)u = 0 , \qquad x \in \mathbb{R} , \quad t \ge 0 ,$$
 (265)

$$u(x,0) = \sin x \ . \tag{266}$$

We have

$$\frac{dx}{ds} = 1 , \qquad \frac{dt}{ds} = 1 , \qquad (267)$$

that is

$$x(s,\tau) - x(s_0,\tau) = s - s_0$$
, $t(s,\tau) - t(s_0,\tau) = s - s_0$. (268)

Each τ identifies a different characteristic curve. The general form of the solution of (268) is

$$\begin{aligned} x(s,\tau) &= s + f(\tau) ,\\ t(s,\tau) &= s + g(\tau) . \end{aligned}$$
(269)

On the other hand, requiring that the coordinate transformation be invertible means that the Jacobian does not vanish for all s and τ . This gives $f'(\tau) \neq g'(\tau)$ for all τ . The natural solution is $f(\tau) = \tau$ and $g(\tau) = 0$. Furthermore, choosing $s_0 = 0$, we have

$$x(s,\tau) = s + \tau$$
, $t(s,\tau) = s$. (270)

It follows that the characteristic curves are straight lines

$$x = t + \tau \; ,$$

one for each value of τ .

Note that the initial condition for u, that is $u(x, 0) = \sin x$, is given at t = 0. On the other hand, by (270) it follows that t = 0 corresponds to s = 0. Therefore, $x(0,\tau) = \tau$ and $u(x(0,\tau), t(0,\tau)) = u(\tau,0) = \sin \tau$. It follows that (266) is equivalent to the system of ordinary differentials equations

$$\frac{du}{ds} + 2u = 0 , \qquad s \ge 0 , \qquad (271)$$

$$u(x(0,\tau),t(0,0)) = u(\tau,0) = \sin\tau .$$
(272)

The solution of (271) is $u = ce^{-2s}$, with the *s*-independent function *c* fixed by (272), that is $c = \sin \tau$, so that

$$f_{\tau}(s) = \bar{u}(s,\tau) = e^{-2s} \sin \tau$$
, (273)

where

$$\bar{u}(s,\tau) \equiv u(x(s,\tau), t(s,\tau)) .$$
(274)

Finally, by (270) and (273) it follows that the solution of (266) is

$$u(x,t) = e^{-2t} \sin(x-t) .$$
(275)

To check the role of s and τ , it is useful to see how, besides (265) and (266), $u(x,t) = e^{-2t} \sin(x-t)$ also solves Eq.(271)

$$\left(\frac{d}{ds}+2\right)u = \left(\frac{dx}{ds}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{dt}{ds}\frac{\partial}{\partial t}+2\right)e^{-2t}\sin(x-t) = 0,$$

that is

$$\left[\frac{dx}{ds}\cos(x-t) + \frac{dt}{ds}(-2\sin(x-t) - \cos(x-t)) + 2\sin(x-t)\right]e^{-2t} = 0.$$
 (276)

We now apply a variation of the above method to equation (246). In order to understand the role of the 't Hooft and Weinberg prescription, we first consider the general case without assuming any prescription. As such the functions β , γ_m and γ_d depend both on $\lambda(\mu)$ and $m(\mu)/\mu$.

First of all note that with respect to the method of characteristics curves, in the equation (246) there is the partial derivative with respect to s, variable that we want to use as one of the characteristic coordinates. On the other hand, noticing that for any differentiable function f one has

$$s\frac{\partial}{\partial s}f(\{sp_k\}) = \sum_k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}f(\{sp_k\}) ,$$

so that

$$s\frac{\partial}{\partial s}f(\{sp_k\})|_{s=1} = \sum_k p_k \frac{\partial}{\partial p_k}f(\{p_k\}) ,$$

it follows that (246) implies

$$\left(-\sum_{k} p_{k} \frac{\partial}{\partial p_{k}} + \beta(\lambda, \frac{m}{\mu}) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta_{m}(\lambda, \frac{m}{\mu}) m \frac{\partial}{\partial m} + c_{d}(\lambda, \frac{m}{\mu})\right) \tilde{\Gamma}_{\text{ren}}^{(n)}(\{p_{k}\}; m, \lambda, \mu) = 0$$
(277)

where 28

$$\delta_m(\lambda, \frac{m}{\mu}) := \gamma_m(\lambda, \frac{m}{\mu}) - 1 , \qquad c_d(\lambda, \frac{m}{\mu}) := d_n - n\gamma_d(\lambda, \frac{m}{\mu}) .$$
(278)

We now consider the following variation of the method of characteristic curves. First, we introduce two new variables parametrized by s

$$\bar{m} = \bar{m}(s,\lambda,m) , \qquad \bar{\lambda} = \bar{\lambda}(s,\lambda,m) , \qquad (279)$$

and consider $m \in \lambda$ as the values of the initial conditions for $\bar{m} \in \bar{\lambda}$

$$\bar{m}(1,\lambda,m) = m$$
, $\bar{\lambda}(1,\lambda,m) = \lambda$. (280)

Consider the equation²⁹

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s} + \beta(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu})\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} + \delta_m(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu})\bar{m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}} + c_d(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu})\right)\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) = 0$$
(281)

and note that for s = 1 it reduces to (277). We also note that such an equation is equivalent to the initial renormalization group equation, in other words,

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s} + \beta(\lambda, \frac{m}{\mu})\frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta_m(\lambda, \frac{m}{\mu})m\frac{\partial}{\partial m} + c_d(\lambda, \frac{m}{\mu})\right)\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; m, \lambda, \mu) = 0,$$
(282)

differs from (281) only for the symbols of the variables. The key point is that if we apply the method of the characteristic curves, where there are constraints on the coefficients $\beta(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu})$ and $\delta_m(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu})\bar{m}$, then, in spite of such constraints, in the 't Hooft and Weinberg prescription Eq.(281) is still equivalent to (282).

Let us consider the total derivative

$$s\frac{d}{ds} = s\frac{\partial}{\partial s}|_{\bar{\lambda},\bar{m}} + s\frac{d\bar{\lambda}}{ds}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}}|_{s,\bar{m}} + s\frac{d\bar{m}}{ds}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}|_{s,\bar{\lambda}} , \qquad (283)$$

 $^{^{28}\}text{Recall}$ that, in any renormalization prescription, both λ and m always depend on $\mu.$

²⁹In the following we omit the dependence of both \bar{m} and $\bar{\lambda}$ on s, $\lambda \in m$, except in the case, when useful, of the dependence on s.
and impose the constraints

$$s\frac{d\lambda}{ds} = \beta(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu}) , \qquad s\frac{d\log\bar{m}}{ds} = \delta_m(\bar{\lambda}, \frac{\bar{m}}{\mu}) .$$
 (284)

We now show that equation (281) together with the constraints (284) is not equivalent to (282). Actually, (281) and (284) imply

$$\left(s\frac{d}{ds} + c_d(\bar{\lambda}(s), \bar{m}(s)/\mu)\right)\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) = 0 , \qquad (285)$$

that is

$$s\frac{d}{ds}f(s,s_0) = 0 , \qquad (286)$$

where

$$f(s,s_0) := \exp\left(\int_{s_0}^s \frac{ds}{s'} c_d(\bar{\lambda}(s'), \bar{m}(s')/\mu)\right) \tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) .$$
(287)

Note that the partial derivative $\partial/\partial s$ in (286) acts both on the exponential in (287) and, due to the argument $\{s^{-1}p_k\}$, on $\tilde{\Gamma}_{ren}^{(n)}$, whereas the other two partial derivatives in (286) act only on $\tilde{\Gamma}_{ren}^{(n)}$.

Eq.(286) means that $f(s, s_0)$ is s-independent. By (280) it follows that $f(1, 1) = \tilde{\Gamma}_{ren}^{(n)}(\{p_k\}; m, \lambda, \mu)$, so that the s-independence implies f(s, 1) = f(1, 1), that is we would have

$$\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{p_k\}; m, \lambda, \mu) = \exp\left(\int_1^s \frac{ds'}{s'} c_d(\bar{\lambda}(s'), \bar{m}(s')/\mu)\right) \tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu)$$
(288)

On the other hand, one may check that the right hand side of (288) does not satisfy³⁰ (277). A simplification due to the 't Hooft and Weinberg prescription, which implies the mass independence of β , $\gamma_m \in \gamma_d$, concerns the solutions of the equations (284) that now reduce to

$$s\frac{d\lambda}{ds} = \beta(\bar{\lambda}) , \qquad s\frac{d\log\bar{m}}{ds} = \delta_m(\bar{\lambda}) .$$
 (289)

Since $\beta(\lambda)$ is *m*-independent, it follows that even $\beta(\bar{\lambda})$, that differs from $\beta(\lambda)$ for the argument only, is both \bar{m} and *m*-independent. Therefore, by (289), it

$$\int_{C} dt f(\mathbf{x}) = \int_{s_0}^{s} ds' f(\mathbf{x}(s')) \sqrt{\sum_{k} {x'_{k}}^{2}(s)} \ .$$

³⁰Recall that for a curvilinear contour integral of $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, we have

follows that even $\overline{\lambda}$ is *m*-independent. This means that in the 't Hooft and Weinberg prescription we have the map³¹

$$m \longrightarrow \bar{m}(s,\lambda,m) = m\,\hat{m}(s,\lambda) \ , \quad \lambda \longrightarrow \bar{\lambda}(s,\lambda) \ .$$
 (290)

Note that in such a transformation s plays the role of modulus for the functions \bar{m} and $\bar{\lambda}$, that is different values of s define different variables. In this way one has a parametrization of coordinate transformations from $(m, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ to $(\bar{m}(s), \bar{\lambda}(s)) \in \mathbb{R}^2$.

Eq.(289) admits the separation of variables

$$\frac{ds}{s} = \frac{d\lambda}{\beta(\bar{\lambda})} , \qquad \frac{d\bar{m}}{\bar{m}} = \frac{ds}{s}\rho_m(s) , \qquad (291)$$

where $\rho_m(s) := \delta_m(\bar{\lambda}(s,\lambda))$, whose solutions are

$$s = \exp\left(\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(s,\lambda)} \frac{d\lambda'}{\beta(\lambda')}\right), \qquad (292)$$

and

$$\bar{m}(s) = \frac{m}{s} \exp\left(\int_{1}^{s} ds' \frac{\gamma_{m}(\bar{\lambda}(s'))}{s'}\right) = \frac{m}{s} \exp\left(\int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(s,\lambda)} d\lambda' \frac{\gamma_{m}(\lambda')}{\beta(\lambda')}\right).$$
(293)

Since $ds/d\lambda = 0$, we have that the total derivative of (292) with respect to λ yields

$$\frac{d\bar{\lambda}}{d\lambda} = \frac{\beta(\bar{\lambda})}{\beta(\lambda)} . \tag{294}$$

Similarly, deriving (293) with respect to m we have

$$\frac{d\bar{m}}{dm} = \frac{\bar{m}}{m} \ . \tag{295}$$

Since in the 't Hooft and Weinberg prescription even γ_d is independent of m, we have

$$\int_{1}^{s} \frac{ds'}{s'} \gamma_d(\bar{\lambda}(s')) = \int_{\lambda}^{\lambda(s,\lambda)} d\lambda' \frac{\gamma_d(\lambda')}{\beta(\lambda')} .$$
(296)

³¹It is worth stressing that the above transformation cannot be interpreted as a change of coordinates from s, λ, m to $s, \overline{\lambda}, \overline{m}$. The reason is that one should first consider the map s, λ, m to $t, \overline{\lambda}, \overline{m}$, and then, after the partial derivatives are computed one can set t = s. The difference arises when one considers each triplet of coordinates as independent variables. In particular, a change of coordinates implies that the partial derivatives between $\overline{m}, \overline{\lambda}$ and t are vanishing. On the other hand, $\partial_s \overline{\lambda} \neq 0$ and $\partial_s \overline{m} \neq 0$. A simple example is provided by (270), where $x = s + \tau$ and t = s, so that $0 = \partial_t x \neq \partial_s x = 1$.

Now note that by (278) and (288), and recalling that $d_n = 4 - n$, we have

$$\tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{p_k\}; m, \lambda, \mu) = s^{4-n} \exp\left(-n \int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma_d(\bar{\lambda}(s'))\right) \tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) .$$
(297)

Let us explicitly check that the right hand side of (297) satisfies equation (277). Set $f = \tilde{\Gamma}^{(n)}(f_{2n}\} \cdot m \lambda \mu$

$$J = \Gamma_{\rm ren}^{\prime}(\{p_k\}; \bar{m}, \lambda, \mu) ,$$

$$g = s^{4-n} \exp\left(-n \int_1^s \frac{ds'}{s'} \gamma_d(\bar{\lambda}(s'))\right) = s^{4-n} \exp\left(-n \int_{\lambda}^{\bar{\lambda}(s,\lambda)} d\lambda' \frac{\gamma_d(\lambda')}{\beta(\lambda')}\right) ,$$

$$h = \tilde{\Gamma}_{\rm ren}^{(n)}(\{s^{-1}p_k\}; \bar{m}(s), \bar{\lambda}(s), \mu) .$$

We have

$$-\sum_{k} p_k \frac{\partial}{\partial p_k} f = gs \frac{\partial}{\partial s} h ,$$

$$\beta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}f = g\Big[\beta(\lambda)n\Big(\frac{\gamma_d(\lambda)}{\beta(\lambda)} - \frac{\gamma_d(\bar{\lambda})}{\beta(\bar{\lambda})}\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda}\Big) + \beta(\lambda)\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} + \beta(\lambda)\frac{\partial\bar{m}}{\partial\lambda}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}\Big]h$$
$$= g\Big[n(\gamma_d(\lambda) - \gamma_d(\bar{\lambda})) + \beta(\bar{\lambda})\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} + (\gamma_m(\bar{\lambda}) - \gamma_m(\lambda))\bar{m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}\Big]h ,$$

$$(\gamma_m(\lambda) - 1)m\frac{\partial}{\partial m}f = g(\gamma_m(\lambda) - 1)m\left(\frac{\partial\bar{\lambda}}{\partial m}\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} + \frac{\partial\bar{m}}{\partial m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}\right)h$$
$$= g(\gamma_m(\lambda) - 1)\bar{m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}}h .$$

Therefore, we have that

$$\Big[-\sum_{k} p_k \frac{\partial}{\partial p_k} + \beta(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} + (\gamma_m(\lambda) - 1)m \frac{\partial}{\partial m} + 4 - n(\gamma_d(\lambda) + 1)\Big]f = 0 ,$$

is equivalent to

$$\left[s\frac{\partial}{\partial s} + \beta(\bar{\lambda})\frac{\partial}{\partial\bar{\lambda}} + (\gamma_m(\bar{\lambda}) - 1)\bar{m}\frac{\partial}{\partial\bar{m}} + 4 - n(\gamma_d(\bar{\lambda}) + 1)\right]h = 0.$$

Calcolo di alcuni integrali

Umberto Natale

Derivazione della (4.3.13) nel testo di Ramond dalla (4.3.11)

Al posto della (4.3.11) nel testo di Ramond utilizziamo l'identità analoga

$$1 = \frac{1}{5} \left(2 \frac{\partial L^2}{\partial L^2} + \frac{\partial l^{\mu}}{\partial l^{\mu}} - 1 \right) ,$$

che inserita nella (4.3.10)

$$I = \frac{2\pi^{\omega-2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \frac{(L^2)^{\omega-1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^3} ,$$

da, dopo integrazione per parti, la (4.3.12), cioè

$$I = -\frac{2\pi^{\omega-2}}{5\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \left(2L^2 \frac{\partial}{\partial L^2} + l^\mu \frac{\partial}{\partial l^\mu} + 1 \right) \frac{(L^2)^{\omega-1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^3}$$

Effettuando le derivate si ottiene

$$\begin{split} I &= -\frac{2\pi^{\omega-2}}{5\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \Big[-6l_\mu \frac{l^\mu \left(L^2\right)^{\omega-1}}{\left(L^2 + l^2 + m^2\right)^4} \\ &+ 2L^2 \frac{\left(\omega - 1\right) \left(L^2\right)^{\omega-2}}{\left(L^2 + l^2m^2\right)^3} - 2L^2 \frac{3\left(L^2 + l^2 + m^2\right)^2 \left(L^2\right)^{\omega-1}}{\left(L^2 + l^2 + m^2\right)^6} \Big] \\ &= \frac{2\pi^{\omega-2}}{5\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \Big[6(l^2 + L^2 + m^2 - m^2) \frac{\left(L^2\right)^{\omega-1}}{\left(L^2 + l^2 + m^2\right)^4} \Big] - \frac{1}{5} \left(2\omega - 1\right) I \\ &= -\frac{2\omega - 1 - 6}{5} I - 6m^2 \frac{2\pi^{\omega-2}}{5\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \frac{\left(L^2\right)^{\omega-1}}{\left(L^2 + l^2 + m^2\right)^4} \,, \end{split}$$

da cui segue la (4.3.13) nel testo di Ramond, cioè

$$I = -\frac{3m^2}{\omega - 1} \frac{2\pi^{\omega - 2}}{\Gamma(\omega)} \int d^4l \int_0^\infty dL^2 \frac{(L^2)^{\omega - 1}}{(L^2 + l^2 + m^2)^4} \,.$$

Derivazione della (4.4.22) nel testo di Ramond dalla (4.4.21)

Consideriamo la (4.4.21) nel testo di Ramond

$$\Sigma(p) = -\frac{1}{4\omega} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ \left(l_\mu \frac{\partial}{\partial l_\mu} + q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu}\right) \times \frac{1}{(l^2 + m^2) \left(q^2 + m^2\right) \left[\left(p + q - l\right)^2 + m^2\right]} \right\} ,$$

e poniamo

$$\begin{split} & L\left(l,m\right) = l^2 + m^2 \;, \\ & Q\left(q,m\right) = q^2 + m^2 \;, \\ & P\left(l,q,p,m\right) = (p+q-l)^2 + m^2 \;. \end{split}$$

Si ha

$$\begin{split} \Sigma(p) &= -\frac{1}{4\omega} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left\{ -\frac{2l^{\mu}l_{\mu}QP}{L^2Q^2P^2} \right. \\ &+ \frac{2LQl^{\mu}\left(p+q-l\right)_{\mu}}{L^2Q^2P^2} - \frac{2q^{\mu}\left(q+p-l\right)_{\mu}QL}{L^2Q^2P^2} \\ &- \frac{2q^{\mu}q_{\mu}L\left[\left(p+q-l\right)^2+m^2\right]}{L^2Q^2P^2} \right\} \,. \end{split}$$

Separando i vari addendi ed aggiungendo e sottra
endo m^2 o p^{μ} (a seconda del caso) per ricostruire la forma di uno dei fattori nel denominatore, si ha

$$\begin{split} \Sigma(p) &= -\frac{1}{2\omega} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \Big[-\frac{l^2 + m^2 - m^2}{L^2 Q P} \\ &- \frac{q^2 + m^2 - m^2}{LQ^2 P} - \frac{(q - l + p - p)^{\mu} (p + q - l)_{\mu}}{LQ P^2} \Big] \;. \end{split}$$

Separando ulteriormente i vari termini

$$\begin{split} \Sigma(p) &= -\frac{1}{2\omega} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \left[-\frac{L}{L^2 Q P} \right. \\ &+ \frac{m^2}{L^2 Q P} + \frac{m^2}{L Q^2 P} + \frac{m^2}{L Q P^2} - \frac{Q}{L Q^2 P} \\ &+ \frac{p^{\mu} \left(p+q-l\right)_{\mu}}{L Q P^2} - \frac{\left(q-l+p\right)^2 + m^2}{L Q P^2} \right], \end{split}$$

da cui, semplificando e separando i termini con la massa dagli altri addendi,

$$\Sigma(p) = -\frac{1}{2\omega} \frac{\lambda^2}{6} (\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left[-\frac{3}{LQP} + \frac{m^2}{LQP} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{P} \right) + \frac{p^{\mu} (p+q-l)_{\mu}}{LQP^2} \right].$$

Si noti che il primo termine nella parentesi graffa è proporzionale alla (4.4.19). Più precisamente,

$$\frac{3}{2\omega}\frac{\lambda^2}{6}\left(\mu^2\right)^{4-2\omega}\int\frac{d^{2\omega}l}{\left(2\pi\right)^{2\omega}}\int\frac{d^{2\omega}q}{\left(2\pi\right)^{2\omega}}\frac{1}{LQP}=\frac{3}{2\omega}\Sigma(p) \ ,$$

da cui

$$\begin{split} \Sigma(p) &= -\frac{1}{2\omega} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \Big[\frac{p^{\mu} \left(p+q-l\right)_{\mu}}{LQP^2} \\ &+ \frac{m^2}{LQP} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{P}\right) \Big] + \frac{3}{2\omega} \Sigma(p) \;, \end{split}$$

 $\operatorname{cioè}$

$$\Sigma(p) = -\frac{1}{2\omega - 3} \frac{\lambda^2}{6} (\mu^2)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left[\frac{p^{\mu} (p+q-l)_{\mu}}{LQP^2} + \frac{m^2}{LQP} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{P} \right) \right].$$
(298)

Consideriamo la seguente somma di tre integrali doppi

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{LQP} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{P}\right) \;.$$

Effettuiamo le sostituzioni

$$q \to q , \qquad l \to l' = p + q - l ,$$

$$l \to l , \qquad q \to q' = -p - q + l , \qquad (299)$$

nel primo e nel secondo integrale doppio, rispettivamente. Poiché entrambe le trasformazioni hanno jacobiana 1 e il dominio d'integrazione, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, rimane invariato, segue che i tre integrali sono identitici. Quindi

$$\int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{m^2}{LQP} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{Q} + \frac{1}{P}\right) = \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{3m^2}{LQP^2} ,$$

da cui segue la (4.4.22) nel testo di Ramond

$$\Sigma(p) = -\frac{1}{2\omega - 3} \frac{\lambda^2}{6} \left(\mu^2\right)^{4-2\omega} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{3m^2 + p^{\mu} \left(p + q - l\right)_{\mu}}{\left(l^2 + m^2\right) \left(q^2 + m^2\right) \left[\left(p + q - l\right)^2 + m^2\right]^2} \,.$$

N.B. L'espressione (4.4.24) nel testo di Ramond

$$K(p) = \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)^2 (q^2 + m^2) \left[(p+q-l)^2 + m^2 \right]} ,$$

può essere ottenuta effettuando nuovamente la sostituzione $l \rightarrow q+p-l$ nell'espressione

$$K(p) = \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{1}{(l^2 + m^2)(q^2 + m^2)\left[(p + q - l)^2 + m^2\right]^2} \,.$$

Di seguito mostriamo che l'espressione (298) può essere derivata dalla (4.4.19) nel testo di Ramond, cioè,

$$\Sigma(p,m) = \frac{\lambda^2 \left(\mu^2\right)^{4-2\omega}}{6} \int \frac{d^{2\omega}l}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{\left(2\pi\right)^{2\omega}} \frac{1}{\left(l^2 + m^2\right)\left(q^2 + m^2\right)\left[\left(p + q - l\right)^2 + m^2\right]}}$$
(300)

utilizzando le proprietà di scala

$$\Sigma(p,m) = \left(m^2\right)^{D-3} \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right) .$$
(301)

,

Si ha

$$\frac{\partial \Sigma\left(p,m\right)}{\partial m^{2}} = \left(D-3\right) \left(m^{2}\right)^{D-4} \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right) + \left(m^{2}\right)^{D-3} \frac{\partial \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right)}{\partial m^{2}}$$

che grazie alla (301) è equivalente a

$$\frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial m^2} = (D-3) \left(m^2\right)^{-1} \Sigma(p,m) + \left(m^2\right)^{D-3} \frac{\partial \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right)}{\partial m^2} .$$

Poiché

$$\frac{\partial}{\partial m^2} = \frac{\partial \frac{p^{\mu}}{m}}{\partial m^2} \frac{\partial}{\partial \frac{p^{\mu}}{m}} = -\frac{1}{2m^2} \frac{p^{\mu}}{m} \frac{\partial}{\partial \frac{p^{\mu}}{m}} = -\frac{1}{2m^2} p^{\mu} \frac{\partial}{\partial p^{\mu}} ,$$

segue

$$\frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial m^2} = (D-3) \left(m^2\right)^{-1} \Sigma(p,m) - \frac{\left(m^2\right)^{D-3}}{2m^2} p^{\mu} \frac{\partial \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right)}{\partial p^{\mu}} ,$$

cioè

$$\Sigma(p,m) = \frac{m^2}{D-3} \frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial m^2} + \frac{(m^2)^{D-3}}{2(D-3)} p^{\mu} \frac{\partial \Sigma\left(\frac{p}{m},1\right)}{\partial p^{\mu}} .$$

Usando ancora la (301) per calcolare la derivata nel secondo addendo, si ha

$$\Sigma(p,m) = \frac{m^2}{D-3} \frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial m^2} + \frac{p^{\mu}}{2(D-3)} \frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial p^{\mu}} ,$$

che riproduce (298) poiché (300) implica

$$\frac{\partial \Sigma(p,m)}{\partial m^2} = -\frac{\lambda^2 (\mu^2)^{4-2\omega}}{6} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \left(\frac{1}{L^2 Q P} + \frac{1}{LQ^2 P} + \frac{1}{LQ P^2}\right),$$

$$\frac{\partial \Sigma (p,m)}{\partial p^{\mu}} = \frac{\lambda^2 (\mu^2)^{4-2\omega}}{(2\omega-3)} \int \frac{d^{2\omega}l}{(2\pi)^{2\omega}} \int \frac{d^{2\omega}q}{(2\pi)^{2\omega}} \frac{(p+q-l)_{\mu}}{(l^2+m^2) (q^2+m^2) \left[(p+q-l)^2+m^2\right]^2} \,.$$