Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 20.06.2008

1. Siano $P(z)$ e $Q(z)$ due polinomi di grado $n > 0$ con zeri tutti semplici e sia $\mathcal{D}_1 := \{z_k | P(z_k) = 0\}$ e $\mathcal{D}_2 := \{w_k | Q(w_k) = 0\}$. Si supponga che $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$ e che $a \notin \mathcal{D}_1$, $a \notin \mathcal{D}_2$. Si determinino e si classifichino i tipi di singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z-a)Q(z)} \exp\left[\frac{1}{Q(z)}\right] ,$$

   e se ne calcoli il residuo all'infinito.

   Facoltativo. Si determini la somma dei residui di $f(z)$ nei punti in $\mathcal{D}_2$.

2. Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2+1} dx ,$$

   $a > 0$.

3. Sia

$$F(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} (|x|+1)^2 u(x) dx , \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) .$$

   Si dimostri che $F(u) \in S'(\mathbb{R})$.

1. $f(z)$ ha singolarità essenziali isolate nei punti w_k, $k = 1, \ldots, n$ e un polo semplice nel punto $z = a$. $\exp\left[\frac{1}{Q(z)}\right]$ tende ad 1 per $z \to \infty$, mentre il rapporto di polinomi tende al rapporto dei coefficienti delle potenze massime, dato da

$$\frac{\frac{1}{n!}P^{(n)}(z)}{\frac{1}{n!}Q^{(n)}(z)} ,$$

cosicché per $z \to \infty$

$$f(z) \sim \frac{P^{(n)}(z)}{Q^{(n)}(z)} \frac{1}{z} + \ldots \ .$$

Quindi il residuo all'infinito è

$$-\frac{P^{(n)}(z)}{Q^{(n)}(z)} \ .$$

La somma dei residui nei punti w_k, $k = 1, \ldots, n$, la si può calcolare osservando che questa deve essere uguale all'opposto della somma dei residui in $z = a$ e all'infinito:

$$R_{\{w_k\}} = \frac{P^{(n)}(z)}{Q^{(n)}(z)} - \frac{P(a)}{Q(a)} \exp\left[\frac{1}{Q(a)}\right] \ .$$

2. È possibile chiudere il contorno di integrazione con un semicerchio di raggio infinito in $\Im z > 0$ (o anche in $\Im z < 0$). Infatti, considerando il semicerchio di raggio R centrato in $z = 0$, esiste una costante B tale che

$$|f(z)| \leq B\frac{R^2}{R^4} = \frac{B}{R^2} , \qquad |z| = R ,$$

quindi l'integrale sul semicerchio è limitato da $\pi B/R$. $f(z)$ ha due poli semplici nel piano complesso superiore nei punti $e^{\pi i/4}$ e $e^{3\pi i/4}$. Per calcolare i residui si può, per esempio, derivare il denominatore, calcolarlo per $z = e^{\pi i/4}$ e $z = e^{3\pi i/4}$, e moltiplicare il risultato per il numeratore calcolato in $z = e^{\pi i/4}$ e $z = e^{3\pi i/4}$ rispettivamente. Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \ .$$

Per quanto riguarda il secondo integrale, il suo contorno lo si può chiudere in $\Im z > 0$. L'ntegrale richiesto è dato da $2\pi i$ volte il residuo di $e^{iaz}/(z^2+1)$ nel punto $z = i$, cioè

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \pi e^{-a} ,$$

$a > 0$.

3. Si ha

$$F(u) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 + 2|x| + 1)u(x)dx , \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

Si osservi che $|x| = x\text{sgn}x$ e che $x \in \Theta_M(\mathbb{R})$, $\text{sgn}x \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. D'altronde se $h \in \Theta_M(\mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ allora $hf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, quindi $|x| \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Il fatto che anche 1 e x^2 (o, più precisamente, i funzionali $\int udx$ e $\int x^2udx$ associati) siano in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ segue da un motivo analogo: se $h \in \Theta_M(\mathbb{R})$ e $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $hu \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, quindi, essendo $u \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, si ha $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx < \infty$. D'altronde, come noto dalla teoria, $||u||_1$ è limitato da una combinazione lineare finita delle sue norme $||\cdot||_{\alpha,\beta}$. Quindi il funzionale lineare corrispondente a $(1+x^2)$ è in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

La verifica diretta è immediata:

$$|F(u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(|x|+1)^2}{1+x^4}(1+x^4)|u(x)|dx \leq C(||u||_{0,0} + ||u||_{4,0}) \ ,$$

con $C := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(|x|+1)^2}{1+x^4}dx$ finito, quindi $F(u) \in S'(\mathbb{R})$.

Si osservi che la scelta della potenza n in

$$1 = \frac{1+x^n}{1+x^n} \ ,$$

è dettata da due fattori. La prima è che n deve essere un numero positivo pari, questo per evitare che il cammino di integrazione nella definizione di C contenga un punto corrispondente ad una singolarità dell'integrando (per n dispari il punto $x = -1$ sarebbe un polo nell'integrando di C appartenente all'intervallo di integrazione). L'altro aspetto è che il termine $(1+x^n)$ a denominatore nell'integrando di C deve garantire l'esistenza dell'integrale necessaria affinché la maggiorazione abbia senso. Quindi, se la f in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)u(x)dx \ ,$$

ha un andamento come x^m all'infinito, allora è necessario scegliere $n = m+2$ se m è pari, altrimenti $n = m+3$. In tal modo l'andamento all'infinito dell'integrando in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^n}dx \ ,$$

sarebbe $1/x^2$ o $1/x^3$ e l'integrale sarebbe definito. Chiaramente si possono scegliere potenze pari tali che $n - m > 2$, la precedente scelta è quella minimale.

Errori più frequenti nella prova degli studenti.

1. Il fatto che all'infinito f vada come $1/z$ (volte una costante), e quindi tenda a zero per $z \to \infty$ non implica che non abbia residuo. Similmente il fatto che una funzione abbia residuo all'infinito non vuol dire che abbia poli (i poli all'infinito si hanno se vi sono potenze positive di z nell'espansione. Per esempio, $z + 1/z$ all'infinito ha un residuo -1 e un polo di ordine 1). Il residuo è un concetto definito tramite integrazione, quindi il residuo di una funzione all'infinito, visto al finito tramite la trasformazione $w = 1/z$, implica il termine $-1/w^2$: $f(z)dz = -w^{-2}f(w^{-1})dw$. $f(z)$ non diverge

all'infinito, come non diverge $f(1/w)$ in $w = 0$, ma diverge una volta moltiplicata per $1/w^2$. Sempre per quanto riguarda il residuo all'infinito, molti studenti hanno dimenticato il contributo proveniente dal rapporto dei due polinomi. Altro errore è stato il dimenticarsi il segno meno: il residuo all'infinito è il coefficiente del termine $1/z$ nell'espansione di f all'infinito cambiato di segno.

2. Molti studenti hanno perso tempo e fatto confusione con il calcolo di residui a causa di scarsa dimestichezza con l'utilizzo dei numeri complessi. Ricordo che per la determinazione delle radici è utile il metodo generale illustrato con il seguente esempio

$$z^n = a \ , \qquad z^n = \rho e^{i\alpha + 2i\pi k} \ , \qquad z_k = \rho^{1/n} e^{i\frac{\alpha}{n} + 2i\pi\frac{k}{n}} \ ,$$

$k \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in [0, 2\pi)$. Le soluzioni diverse sono quelle per $k = 0, 1, \ldots n-1$ modulo n. Questo significa che vi sono solamente n radici distinte, la scelta canonica è $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

3. Altro errore, anche se raro, è stato scrivere $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x)dx \leq \sup|u(x)|$. Si osservi che $\int_A^B f(x)dx \leq \sup|f(x)| \int_A^B dx = \sup|f(x)|(B-A)$ che per $A \to -\infty$ e $B \to +\infty$ diverge.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 27.06.2008

1. Si determini una funzione analitica la cui parte reale sia

   a) $3x^2y - y^3$,

   b) $x - xy$,

   c) $\frac{y}{x^2+y^2}$,

   dove $z =: x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si determinino tutte le singolarità ed i residui della funzione

$$f(z) = \frac{(3z-4)e^{z^2}}{(z^5-1)(4iz-3)} + \frac{1}{\sin\frac{1}{z^2}} \ .$$

   Si determinino tutti i tipi di singolarità della funzione

$$g(z) = \sin\frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sin\frac{1}{z}} \ .$$

3. Si calcolino i seguenti integrali

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2a+1-\cos\theta)^2} \ , \qquad a > 0 \ ,$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

4. Si mostri che $(x^2-1)\delta'$ è una distribuzione temperata.

1. Sia $v(x,y)$ la parte immaginaria della funzione cercata. Le funzioni richieste sono determinate dalle condizioni di Cauchy-Riemann secondo la procedura usuale indicata anche nel testo del Rossetti.

   a) $v(x,y) = 3xy^2 - x^3$,

   b) $v(x,y) = y - y^2/2 + x^2/2$,

   c) $v(x,y) = x/(x^2+y^2)$. Si noti che la funzione analitica risultante (in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{0\}$) è i/z.

2. La funzione $f(z)$ ha una singolarità essenziale non isolata in $z=0$, dovuta al termine $1/\sin(1/z^2)$. Infatti questa ha poli nei punti $z_{k,\pm} = \pm\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$, con $z=0$ loro punto di accumulazione. Il residuo nei poli è

$$\lim_{z\to z_{k,\pm}} \frac{z - z_{k,\pm}}{\sin(1/z^2)} = -\frac{z^3_{k,\pm}}{2\cos(1/z^2_{k,\pm})} = \pm\frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{(k\pi)^3}} \ .$$

   Il punto all'infinito è una singolarità essenziale isolata (dovuta al termine e^{z^2}). I punti $\tilde{z}_k = e^{2i\pi\frac{k}{5}}$, $k = 0,\ldots,4$, corrispondono ai 5 poli dovuti al termine $1/(z^5-1)$. L'ultima singolarità, dovuta al termine $1/(4iz-3)$, si ha nel punto $\tilde{z}_5 = -3i/4$. Per il calcolo dei sei residui nei punti $\tilde{z}_k$, $k = 0,\ldots,5$ il contributo viene solamente dal primo termine (il secondo termine ha residuo nullo in tali punti) basta derivare il denominatore di $\frac{(3z-4)e^{z^2}}{(z^5-1)(4iz-3)}$ cosicché

$$R_k := \mathrm{Res}[f(z)]_{z=\tilde{z}_k} = \frac{(3\tilde{z}_k - 4)e^{\tilde{z}_k^2}}{24i\tilde{z}_k^5 - 15\tilde{z}_k^4 - 4i} \ ,$$

   $k = 0,\ldots,5$. Il residuo all'infinito corrisponde all'opposto del coefficiente del termine $1/z$ in serie di Laurent. La determinazione di tale serie non è immediata in quanto contiene un numero infinito di potenze sia negative che positive (a differenza del coefficiente di $1/z$ nell'esercizio del compito precedente che, corrispondendo proprio al termine leading, era di immediata determinazione). D'altronde, calcolare il residuo all'infinito di una somma di due funzioni di cui una ha ivi residuo nullo (come $1/\sin(1/z^2)$), è ovviamente equivalente a calcolare il residuo della sola funzione che ha residuo non nullo. Il primo termine della funzione, cioè $\frac{(3z-4)e^{z^2}}{(z^5-1)(4iz-3)}$, ha solo singolarità isolate, quindi possiamo calcolarne il residuo all'infinito utilizzando il fatto che la somma totale dei residui è nulla. Risulta quindi che il residuo all'infinito è uguale all'opposto della somma dei residui nei punti $e^{2i\pi\frac{k}{5}}$, $k = 0,\ldots,4$ più quello nel punto $-3i/4$, cioè

$$\mathrm{Res}[f(z)]_{z=\infty} = -\sum_{k=0}^{5} R_k \ .$$

   La funzione $g(z)$ ha una singolarità essenziale isolata in $z=0$ dovuta al primo termine ($z=0$ è un punto di accumulazione di zeri per $\sin(1/z^2)$) ed una singolarità essenziale non isolata dovuta al secondo termine che ha, sempre in $z=0$, un punto di accumulazione di poli, dati da $z_k = (k\pi)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ovviamente la somma di due funzioni, una con singolarità essenziale isolata in $z = 0$ e l'altra con singolarità essenziale non isolata nello stesso punto, corrisponde ad una funzione con singolarità essenziale non isolata (in $z = 0$).

3. Consideriamo la variabile z nel cerchio di raggio 1, $z = e^{i\theta}$. Quindi $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ e l'integrale richiesto è equivalente a
$$\oint_C f(z)dz \ ,$$
dove C è il cerchio di raggio 1 e
$$f(z) = \frac{1}{iz}\frac{1}{(2a+1-\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^2} = \frac{z}{i(-z^2/2+(2a+1)z-1/2)^2} \ .$$
Poiché gli zeri del denominatore sono
$$z_1 = (2a+1) - 2\sqrt{a^2+a} \ , \qquad z_2 = (2a+1) + 2\sqrt{a^2+a} \ ,$$
si ha
$$f(z) = \frac{4z}{i(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \ .$$
L'unica singolarità all'interno di C si ha per $z = z_1$. Utilizzando la rappresentazione integrale di Cauchy
$$\frac{d^n g(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z')}{(z'-z)^{n+1}}dz' \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$
dove γ è una qualsiasi curva chiusa (si sottintende sempre che non vi siano autointersezioni) al cui interno e su di essa non vi siano singolarità di $g(z)$, si ha
$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \frac{dh(z)}{dz}\Big|_{z=z_1} \ ,$$
con
$$h(z) = \frac{4z}{i(z-z_2)^2} \ .$$
Quindi
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2a+1-\cos\theta)^2} = \frac{\pi(2a+1)}{4(a^2+a)^{3/2}} \ , \qquad a > 0 \ .$$
Anche nel caso del secondo integrale eseguiamo lo stesso cambio di variabile. La funzione da integrare è
$$f(z) = \frac{1}{2^{2n} iz}(z+z^{-1})^{2n} \ .$$
L'unico polo è per $z = 0$. Inoltre, si vede immediatamente che il coefficiente del termine $1/z$ è $-i/2^{2n}$ volte il coefficiente della potenza 0 in z proveniente dallo sviluppo di $(z+z^{-1})^{2n}$. Tale costante è $\binom{2n}{n} = (2n)!/(n!)^2$. Quindi
$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta = \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

4. Poiché $(x^2-1) \in \Theta_M$ e $\delta' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ segue che $(x^2-1)\delta' \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Alternativamente $((x^2-1)\delta', u) = (\delta', (x^2-1)u) = -(\delta, [(x^2-1)u]') = u'(0)$, quindi $|((x^2-1)\delta', u)| = |u'(0)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |u'(x)| = ||u||_{0,1}$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 11.07.2008

1. Si determini una funzione analitica la cui parte reale sia
$$\frac{y}{(x-t)^2+y^2} ,$$
dove $z =: x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, con t un parametro reale.

2. Dopo aver fattorizzato il polinomio $z^n - 1$ in polinomi di grado 1, si determini il residuo del suo inverso nel punto $z = 1$.

3. Si calcolino i seguenti integrali
$$\int_{|z|=1} \frac{\cos e^{-z}}{z^2} dz ,$$
$$\int_{|z|=n\pi} \tan z dz , \qquad n \in \mathbb{N}_+ .$$
Suggerimento: si noti che $\tan z$ può essere utilmente espressa come derivata logaritmica.

4. Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx ,$$
$a > 0$.

5. Sia $y_k = \phi_k(x)$, $k = 1, \ldots, n$, $x := (x_1, \ldots, x_n)$, un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$. Si fornisca un esempio di diffeomorfismo non banale tale che se f è una distribuzione temperata regolare, allora tale risulti anche $f \circ \phi^{-1}$.

1. $i/(z-t)$.

2. $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(z - e^{i2k\pi/n}) = (z-1)\sum_{k=0}^{n-1} z^k$, e $Res_{z=1}(z^n-1)^{-1} = 1/n$.

3. $\cos e^{-z}$ è analitica in $|z| \leq 1$ e non nulla nell'origine. Quindi

$$\int_{|z|=1} \frac{\cos e^{-z}}{z^2} dz = 2\pi i \frac{d \cos e^{-z}}{dz}|_{z=0} = 2\pi i \sin 1 \ .$$

Il secondo integrale è l'opposto dell'indicatore logaritmico di $\cos z$, funzione analitica in $|z| \leq n\pi$, $n \in \mathbb{N}_+$, e nulla in $(2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Quindi

$$\int_{|z|=n\pi} \tan z dz \ = -4n\pi i = -2\pi i(\sharp \text{ zeri } - \ \sharp \text{ poli di} \cos z \text{ in } |z| < n\pi) \ .$$

4. $\cos x \ \rightarrow \ e^{ix}$ perché $\sin x$ è una funzione dispari rispetto ad x. Poiché $z^2 + a^2 = (z-ia)(z+ia)$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x^2+a^2)^2} dx = 2\pi i \frac{d}{dz} \frac{e^{iz}}{(z+ia)^2}|_{z=ia} = \pi \frac{e^{-a}(1+a)}{2a^3} \ .$$

5. Sia $v(x) := |J(\phi(x))| u(\phi(x))$. È necessario mostrare che il modulo $|(f(x), v(x))|$ è maggiorato da una combinazione lineare finita

$$|(f(x), v(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \|u\|_{\alpha,\beta} \ . \tag{1}$$

Osserviamo che se $\|v\|_{\alpha,\beta}$ fosse maggiorata da una combinazione lineare finita di $\|u\|_{\alpha,\beta}$, allora la maggiorazione cercata sarebbe una diretta conseguenza. Infatti, tale maggiorazione di $\|v\|_{\alpha,\beta}$ implicherebbe che $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quindi, essendo per ipotesi

$$|(f(x), u(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} \|u\|_{\alpha,\beta} \ , \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

si avrebbe anche

$$|(f(x), v(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \|v\|_{\alpha,\beta} \ ,$$

visto che $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. D'altronde questa relazione e la maggiorazione ipotizzata implicherebbero anche Eq.(1). Resta quindi da mostrare che $\|v\|_{\alpha,\beta}$ è effettivamente maggiorata da una combinazione lineare finita di $\|u\|_{\alpha,\beta}$. A tal fine osserviamo che, nel caso delle trasformazioni lineari non singolari, $|J(\phi(x))|$ è una costante non nulla. Inoltre, nel caso delle trasformazioni lineari, se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, allora anche $u \circ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Per mostrare questo consideriamo il caso della norma

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x_1^2 \frac{\partial u(\phi(x))}{\partial x_2} \right| \ ,$$

il caso generale lo si dimostra in modo del tutto analogo. Si ha

$$x_1^2 \frac{\partial u(\phi(x))}{\partial x_2} = \Big[\sum_{j=1}^n A_{1j}^{-1}(y_j - B_j) \Big]^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial u(y)}{\partial y_i}$$

$$= \Big[\sum_{j=1}^{n} A^{-1}_{1j}(y_j - B_j)\Big]^2 \sum_{i=1}^{n} A_{i2}\frac{\partial u(y)}{\partial y_i} \ .$$

Questa espressione, come nel caso generale, è un polinomio nelle y_i che moltiplica una combinazione di derivate parziali, rispetto alle variabili y_i, della funzione di test $u(y)$ (si noti che, essendo $y = \phi(x)$ un diffeomorfismo, e quindi una mappa di $\mathbb{R}^n$ in se stesso, risulta che $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}$ è equivalente a $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}$). Come tale il $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}$ del modulo di tale espressione è sicuramente maggiorato da un'opportuna combinazione delle norme $||u||_{\alpha,\beta}$, quindi $u \circ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Commenti

La funzione richiesta al primo punto è determinabile risolvendo le condizioni di Cauchy-Riemann. Come illustrato a lezione, un metodo spesso più rapido consiste nel sostituire x con $(z+\bar z)/2$ e y con $(z-\bar z)/2i$ nell'espressione della parte reale da cui, come nel presente caso, si ricava immediatamente la funzione cercata. Infatti

$$u((z+\bar z)/2,(z-\bar z)/2i) = \frac{1}{2i}\frac{z-\bar z}{|z|^2+t^2-t(z+\bar z)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{i}{z-t} - \frac{i}{\bar z - t}\Big)$$
$$= (f(z)+\bar f(z))/2 \ ,$$

cioè $f(z) = i/(z-t)$ (a cui si può aggiungere una qualsiasi costante che sia immaginaria pura senza che cambi la parte reale).

Per quanto riguarda il quarto punto si può anche porre $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$ e calcolare i due integrali corrispondenti i cui valori coincidono poiché il primo dei due integrali risultanti è $1/2$ l'integrale sopra scritto. È istruttivo determinare tramite espansione in serie il coefficiente del termine $(z-ia)^{-1}$. Si ha

$$(z+ia)^{-2} = (z-ia+2ia)^{-2} = (2ia)^{-2}\Big(1+\frac{z-ia}{2ia}\Big)^{-2}$$
$$= (2ia)^{-2}\Big(1 - 2\frac{z-ia}{2ia} + \ldots\Big) \ .$$

Inoltre $e^{iz} = e^{-a}e^{i(z-ia)} = e^{-a}[1+i(z-ia)+\ldots]$, cosicché

$$\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{-a}}{(z-ia)^2(2ia)^2}\Big(1-2\frac{z-ia}{2ia}+\ldots\Big)(1+i(z-ia)+\ldots)$$
$$= \frac{e^{-a}}{(z-ia)^2(2ia)^2} - \frac{e^{-a}}{ia(z-ia)(2ia)^2} + \frac{ie^{-a}}{(z-ia)(2ia)^2} + \ldots \ ,$$

e il residuo richiesto è

$$\frac{e^{-a}}{i4a^3} - \frac{ie^{-a}}{4a^2} = \frac{e^{-a}(1+a)}{i4a^3} \ .$$

Quindi

$$2\pi i Res_{z=ia}\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2} = \pi\frac{e^{-a}(1+a)}{2a^3} \ ,$$

$a > 0$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 5.09.2008

1. Si determini una funzione analitica la cui parte reale sia
$$\log\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$
dove $z =: x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si verifichi che la metrica di Poincaré
$$ds^2 = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2}\ ,$$
è invariante sotto le trasformazioni lineari frazionali (trasformate di Möbius)
$$z \mapsto z' := \frac{az+b}{cz+d}\ ,$$
dove $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$.

3. Si calcolino i seguenti integrali:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx\ , \qquad a > 0\ ,$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+a^2-2a\cos\theta}d\theta\ , \qquad 0 < a < 1\ .$$

4. Si consideri
$$(x^4+1, u) := \int_{-\infty}^{+\infty} (x^4+1)u(x)dx\ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\ .$$
Dopo aver mostrato che $(x^4+1, u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si dimostri che la distribuzione continua ad essere temperata sotto una trasformazione lineare arbitraria della coordinata x.

1. $\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\log z\bar{z} = \frac{1}{2}\log z + \frac{1}{2}\log \bar{z}$. Quindi, essendo $\Re f(z) \equiv \frac{1}{2}(f(z)+\bar{f}(z))$, segue che la funzione richiesta è $\log z+c$, con c una costante immaginaria arbitraria. È istruttivo osservare che poiché

$$\tan\theta = -i\frac{e^{2i\theta}-1}{2^{2i\theta}+1} \ , \qquad \longrightarrow \qquad e^{2i\theta} = \frac{i-\tan\theta}{i+\tan\theta} \ ,$$

si ha

$$\theta = \frac{1}{2i}\log\frac{i-\tan\theta}{i+\tan\theta} \ .$$

Ovvero, ponendo $w := \tan\theta$,

$$\arctan w = \frac{1}{2i}\log\frac{i-w}{i+w} \ ,$$

che mostra la relazione tra la funzione inversa della funzione tan, arctan, e la funzione inversa della funzione esponenziale, log. Alcuni studenti, risolvendo il problema utilizzando le equazioni di Cauchy Riemann, hanno espresso il risultato utilizzando la funzione arctan, che risulta naturale risolvendo l'integrazione. Naturalmente tale risultato coincide con quello sopra riportato:

$$\frac{1}{2}\log z\bar{z}+i\arctan\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\log z\bar{z}+\frac{1}{2}\log\frac{ix-y}{ix+y} = \frac{1}{2}\log z\bar{z}+\frac{1}{2}\log\frac{iz}{i\bar{z}} = \log z \ .$$

2. Si ha

$$dz' = \frac{dz'}{dz}dz = \frac{dz}{(cz+d)^2} \ , \qquad \Im z' = \frac{\Im z}{|cz+d|^2} \ ,$$

quindi

$$\frac{|dz'|^2}{(\Im z')^2} = \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} \ .$$

3. L'integrando è pari, quindi l'intervallo di integrazione può essere sostituito con tutto l'asse reale (dividendo il risultato per 2). Poiché $x\cos x$ è una funzione dispari possiamo considerare l'integrale equivalente

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{ix}}{x^2+a^2} = \pi(\text{somma dei residui di } xe^{ix}/(x^2+a^2) \text{ in } \Im z>0) \ .$$

L'unico polo in $\Im z > 0$ si ha per $z = ia$, quindi

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-a} \ , \qquad a>0 \ .$$

Per quanto riguarda il secondo integrale si osservi che sul cerchio di raggio unitario si ha $z = e^{i\theta}$, quindi $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$, $|z| = 1$, cosicché l'integrale è equivalente a

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz \ ,$$

dove

$$f(z) := \frac{1}{iz}\frac{1}{1+a^2-a(z+z^{-1})} = \frac{i}{az^2-(1+a^2)z+a} \ .$$

Le radici del denominatore sono

$$z_1 = a \ , \qquad z_2 = \frac{1}{a} \ .$$

Per $0 < a < 1$ l'unico polo di $f(z)$ si ha per $z = a$, quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a^2 - 2a\cos\theta} d\theta = \frac{2\pi}{1 - a^2} \ , \qquad 0 < a < 1 \ .$$

4.

$$|(x^4 + 1, u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}(x^6 + 1)|u(x)|dx \leq C(||u||_{0,0} + ||u||_{6,0}) \ ,$$

dove $C := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1} dx$. Con tale maggiorazione si mostra anche che $((Ax + B)^4 + 1, u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Come mostrato nella soluzione del compito dell'11.07.08, è una proprietà delle distribuzioni temperate di rimaner tali sotto trasformazioni lineari della coordinata.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 15.09.2008

1. Sia
$$v_1(x,y) := e^x \sin y \ ,$$
e
$$v_2(x,y) := -e^{-x} \sin y \ ,$$
$x, y \in \mathbb{R}$. Determinare le funzioni analitiche $f_1(z)$ e $f_2(z)$, $z =: x + iy \in \mathbb{C}$, tali che
$$\Im f_i(z) = v_i(x,y) \ , \qquad i = 1, 2 \ .$$
Si verifichi che $u_i(x,y) := \Re f_i(z)$ e $v_i(x,y)$, $i = 1,2$, sono funzioni armoniche.

2. Sia $\Im z \neq 0$. Si determini la condizione su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dipendente dal segno di $\Im z$, tale che
$$\Im \frac{az+b}{cz+d} > 0 \ .$$

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1} dx \ .$$

4. Si calcolino gli integrali
$$\int_{\gamma_i} \frac{e^{-z^2}}{z^2} dz \ , \qquad i = 1, 2 \ ,$$
dove

a) γ_1: quadrato con vertici in $1+i$, $-1+i$, $-1-i$, $1-i$.

b) γ_2: l'ellisse
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

5. Si verifichi la relazione
$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx} \log |x| \ ,$$
dove la derivata va intesa nel senso delle distribuzioni in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si esprima
$$\frac{1}{x \pm i0} := \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{x \pm iy} \ ,$$
in termini di $P(\frac{1}{x})$ e $\delta(x)$ utilizzando la relazione
$$\log(x \pm i0) := \lim_{y \to 0^+} \log(x \pm iy) = \log |x| \pm i\pi\theta(-x) \ .$$

1. $v_1(x,y) = e^{\frac{z+\bar z}{2}}(e^{i\frac{z-\bar z}{2i}} - e^{-i\frac{z-\bar z}{2i}})/2i = \Im e^z$, quindi $f_1(z) = e^z$.

   $v_2(x,y) = -e^{-\frac{z+\bar z}{2}}(e^{i\frac{z-\bar z}{2i}} - e^{-i\frac{z-\bar z}{2i}})/2i = \Im e^{-z}$, quindi $f_2(z) = e^{-z}$.

   Se $f(z)$ è analitica, allora $\Im f(z)$ e $\Re f(z)$ sono funzioni armoniche. Si verifica immediatamente che $\Delta v_i = 0 = \Delta u_i$, $i = 1,2$, dove $u_1 = e^x \cos y$, $u_2 = e^{-x}\cos y$ e $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$.

2. $\Im \frac{az+b}{cz+d} = (ad-bc)\Im z/|cz+d|^2$, e la condizione è $\mathrm{sgn}(ad-bc) = \mathrm{sgn}(\Im z)$.

3. Chiudiamo alla Jordan in $\Im z > 0$ dove l'integrando ha poli semplici nei punti $e^{2\pi i/5}$ e $e^{4\pi i/5}$. Per il calcolo dei due residui conviene considerare la derivata del denominatore

$$\frac{e^{2\pi i/5}-1}{5e^{8\pi i/5}} = \frac{e^{4\pi i/5}-e^{2\pi i/5}}{5}\ , \qquad \frac{e^{4\pi i/5}-1}{5e^{16\pi i/5}} = \frac{e^{8\pi i/5}-e^{4\pi i/5}}{5}\ ,$$

   quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-1}{x^5-1}dx = \frac{2\pi i}{5}(-e^{2\pi i/5} + e^{-2\pi i/5}) = \frac{4\pi}{5}\sin(2\pi/5)\ .$$

4. $\frac{e^{-z^2}}{z^2}$ ha poli solo nell'origine. Dall'espansione intorno a $z = 0$

$$\frac{e^{-z^2}}{z^2} = \frac{1}{z^2} - 1 + \frac{z^2}{2!}\dots\ ,$$

   segue che i due integrali sono nulli.

5. Per definizione di derivata di una distribuzione si ha

$$\Big(\frac{d\log|x|}{dx}, u(x)\Big) = -\Big(\log|x|, \frac{du(x)}{dx}\Big) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|\frac{du(x)}{dx}dx\ .$$

   D'altronde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \log|x|u'(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\Big(\int_{-\infty}^{-\epsilon} u'(x)\log(-x)dx + \int_{\epsilon}^{+\infty} u'(x)\log x dx\Big)\ .$$

   Effettuando il cambio di variabile $x \to -x$ nel primo integrale del secondo membro, integrando per parti e osservando che

$$u(x)\log(-x)\Big|_{-\infty}^{-\epsilon} = u(-x)\log x\Big|_{+\infty}^{\epsilon} = -u(-x)\log x\Big|_{\epsilon}^{+\infty}\ ,$$

   si ha che $((\log|x|)', u(x))$ è equivalente a

$$= -\lim_{\epsilon\to 0^+}\Big[\Big(u(x) - u(-x)\Big)\log x\Big]\Big|_{\epsilon}^{+\infty} + \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\epsilon}^{+\infty}\frac{u(x)-u(-x)}{x}dx\ ,$$

   e la relazione richiesta segue osservando che il primo termine è nullo.

   La soluzione dell'ultimo quesito è immediata:

$$\frac{1}{x \pm i0} = \frac{d}{dx}\log(x \pm i0) = \frac{d}{dx}\log|x| \pm i\pi\frac{d}{dx}\theta(-x) = P\Big(\frac{1}{x}\Big) \mp i\pi\delta(x)\ .$$

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 20.05.2009

1. È noto che dati i numeri complessi $w_1, \dots, w_m$, vale la relazione
$$|\sum_{k=1}^{m} w_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |w_k| \ . \qquad (1)$$
Si mostri, limitandosi al caso $m = 2$, che il segno di uguaglianza vale se e solo se $w_2 = a w_1$, con $a \geq 0$.

2. Si descrivano tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{z^5 - i}{z^4 + i} e^{\frac{1}{z-2i}} \ .$$

3. Sia $a > 1$. Si calcoli l'integrale
$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a + \sin\theta} d\theta \ .$$

4. Sia $D(0,1)$ il disco aperto di raggio unitario centrato in 0. Si dimostri che tutti gli zeri del polinomio di grado $n \geq 1$
$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \ , \qquad (2)$$
dove $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$, sono esterni a $D(0,1)$.
Si noti che $P(z_0) = 0$ implica anche $(1 - z_0)P(z_0) = 0$, cioè
$$a_0 = (a_0 - a_1)z_0 + (a_1 - a_2)z_0^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)z_0^n + a_n z_0^{n+1} \ ,$$
che può essere utile considerare insieme alla disuguaglianza (1).

5. *Facoltativo.* Si mostri che se $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n > 0$, allora nessun zero del polinomio $P(z)$ definito in (2) appartiene a $\overline{D}(0,1)$.
Si noti che il punto 4 implica che se $P(z_0) = 0$ con $|z_0| \leq 1$, allora $|z_0| = 1$.

1. $|w_1 + w_2|$ coincide con il modulo della somma di due vettori centrati in 0, ed è quindi chiaro che si ha $|w_1 + w_2| = |w_1| + |w_2|$ se e solo se i due vettori giacciono sullo stesso raggio vettore e sono concordi, cioè $w_2 = aw_1$, $a \geq 0$. Equivalentemente, ponendo $w_k = \rho_k e^{i\alpha_k}$, $k = 1, 2$, si ha $|\rho_1 + \rho_2 e^{i(\alpha_2 - \alpha_1)}| = \rho_1 + \rho_2$, cioè $\cos(\alpha_2 - \alpha_1) = 1$.

2. f ha una singolarità essenziale isolata in $z = 2i$, un polo semplice all'infinito, dove $f \sim z + \ldots$, e 4 poli semplici nelle soluzioni di $z^4 = e^{-\frac{i}{2}\pi + 2i\pi k}$, ovvero
$$z_k = e^{-\frac{i}{8}\pi + \frac{i}{2}\pi k} \ , \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ .$$

3. $$I(a) = 2\pi \sum_{res.\, in\, S^1} \frac{2i}{z^2 + 2iaz - 1} \ .$$
L'unico polo interno al cerchio è $z_0 = -ia + i\sqrt{a^2 - 1}$, ed il residuo è $1/\sqrt{a^2 - 1}$, quindi
$$I(a) = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}} \ .$$

4. La relazione
$$a_0 = (a_0 - a_1)z_0 + (a_1 - a_2)z_0^2 + \ldots + (a_{n-1} - a_n)z_0^n + a_n z_0^{n+1} \ , \qquad (3)$$
la positività di a_0 e Eq.(1) implicano
$$a_0 = |a_0| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1})z_0^{k+1}| + |a_n z_0^{n+1}| \ . \qquad (4)$$
Si supponga che $z_0 \in D(0, 1)$, cosicché $|z_0^{k+1}| < |z_0|$. Poiché $a_k - a_{k+1} \geq 0$, $\forall k$, e $a_n > 0$, segue che la relazione (4) nel caso $z_0 \in D(0, 1)$, diventa
$$\sum_{k=0}^{n-1} |(a_k - a_{k+1})z_0^{k+1}| + |a_n z_0^{n+1}| \leq |z_0| (\sum_{k=0}^{n-1} |a_k - a_{k+1}| + |a_n|) = |z_0| a_0 < a_0 \ .$$
Quindi $z_0 \in D(0, 1)$ implica l'assurdo $a_0 < a_0$.

5. Come notato nel testo del problema si ha $|z_0| \geq 1$. Si supponga che $|z_0| = 1$. In tal caso, ricordando che $a_0 > a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0$, si ha
$$|(a_0 - a_1)z_0| + |(a_1 - a_2)z_0^2| + \ldots + |a_n z_0^{n+1}| =$$
$$|(a_0 - a_1)| + |(a_1 - a_2)| + \ldots + |a_n| = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \ldots + a_n = a_0 = |a_0| \ .$$
Esprimendo il modulo di a_0 come il modulo del secondo membro della (3) e identificandolo con il primo membro della precedente relazione, si ottiene
$$|(a_0 - a_1)z_0| + |(a_1 - a_2)z_0^2| + \ldots + |a_n z_0^{n+1}| =$$
$$|(a_0 - a_1)z_0 + (a_1 - a_2)z_0^2 + \ldots + a_n z_0^{n+1}| \ , \qquad (5)$$
che è la (1), con $m = n + 1$ e $w_k = (a_{k-1} - a_k)z_0^k$, $k = 1, \ldots, n$ e $w_{n+1} = a_n z_0^{n+1}$, nel caso in cui vale l'uguaglianza. La condizione necessaria e

sufficiente perché nella (1) valga l'uguaglianza è che $w_1, \ldots, w_m$ siano tra loro multipli reali non negativi. Quindi, affinché Eq.(5) sia soddisfatta è necessario che $(a_0 - a_1)z_0, \ldots, (a_{n-1} - a_n)z_0^n, a_n z_0^{n+1}$ siano tra loro multipli reali non negativi. D'altronde, poiché $a_k - a_{k+1} > 0$ per $k = 0, \ldots, n-1$, e $a_n > 0$, segue che la precedente richiesta impone che, per $k = 1, \ldots, n+1$, si abbia $z_0^k = c_k a$, con c_k reale e segno indipendente da k e a un numero complesso. È immediato verificare, per esempio ponendo $z_0 = \rho e^{i\alpha}$ cosicché $z_0^k = \rho^k e^{ik\alpha}$, che tale condizione implica $z_0 \geq 0$ e poiché $|z_0| = 1$, deve essere $z_0 = 1$. D'altronde, essendo $P(1) = a_0 + \ldots + a_n > 0$, si ha che $z_0 = 1$ non è zero di $P(z)$. Segue che gli zeri di $P(z)$ non sono in $\overline{D}(0,1)$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 16.06.2009

1. Si descrivano tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{1}{z^5 - i} e^{\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}} \; .$$

2. Si calcoli l'integrale
$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2+2z}}{(z+1)^2} dz \; .$$

3. Sia $a > 0$. Si calcolino gli integrali
$$I_1(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iax}}{x^4+1} dx \; ,$$
$$I_2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4+a^4} dx \; .$$

4. Si dimostri che il funzionale
$$F_a(u) = \int_0^{+\infty} e^{iax} u(x) dx \; , \qquad a \in \mathbb{R} \; , u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \; ,$$
appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5. Si determini il funzionale corrispondente alla derivata, nel senso delle distribuzioni, di F_a.

6. Si calcoli
$$(\frac{d^2}{dx^2} \Im \log(x - i0), u(x)) \; , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \; ,$$
dove la derivata seconda va intesa nel senso delle distribuzioni.

1. f ha singolarità essenziali isolate in $z = (k\pi)^{-1}$, $k \in \mathbb{Z}$. Il punto $z = 0$, essendo punto di accumulazione di tali singolarità, è quindi una singolarità essenziale non isolata. Inoltre f ha poli semplici per $z^5 = e^{\frac{i}{2}\pi + 2ik\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ le cui radici distinte sono
$$z_k = e^{\frac{i}{10}\pi + \frac{2i}{5}k\pi} \ , \qquad k = 0, \ldots, 4 \ .$$

2. Riscrivendo $f(z) = \frac{e^{z^2+2z}}{(z+1)^2} = \frac{e^{(z+1)^2-1}}{(z+1)^2}$ e sviluppando in serie di potenze attorno al punto $z = -1$ si ha
$$\frac{e^{(z+1)^2-1}}{(z+1)^2} = \frac{1}{e(z+1)^2} + \frac{1}{e} + \frac{(z+1)^2}{2!e} + \ldots \ ,$$
il che mostra che non ci sono poli di ordine 1. Alternativamente, si osservi che
$$f(-z-2) = f(z) \ ,$$
ovvero la funzione $g(w) = f(z(w))$, $w = z + 1$, è pari
$$g(w) = \frac{e^{w^2-1}}{w^2} = g(-w) \ ,$$
e come tale non può avere residuo in $w = 0$.

3. Possiamo chiudere alla Jordan nel semipiano superiore, questo tra l'altro implica che passiamo dalla variabile $x \in \mathbb{R}$ a $z \in \mathbb{C}$. Tra i quattro poli dell'integrando in $I_1(a)$
$$z_k = e^{\frac{i}{4}\pi + \frac{i}{2}k\pi} \ , \qquad k = 0, 1, 2, 3 \ ,$$
solamente z_0 e z_1 sono nel semipiano superiore. Per calcolare il residuo usiamo due accorgimenti che semplificano i conti. Il primo è che l'integrando è del tipo $f(z)/g(z)$ con il numeratore $f(z) = e^{iaz}$ che assume valori finiti non nulli nei punti z_k. La funzione $g(z)$ d'altronde è della forma $g(z) = (z - z_k)h_k(z)$. Il residuo della funzione $f(z)/g(z)$ nel punto $z = z_k$ è quindi $f(z_k)/h_k(z_k)$. La funzione $h_k(z_k)$ si può determinare nel modo canonico, che nel presente caso corrisponde a decomporre il polinomio $z^4 + 1$ nel prodotto $\prod_{k=0}^{3}(z - z_k)$. Lo svantaggio di questa determinazione è che è necessario far conti algebrici noiosi (e rischiosi per i distratti). È invece conveniente considerare la derivata della funzione $g(z)$. In tal caso si ha $g'(z) = h_k(z) + (z - z_k)h'(z)$ che, si noti, visto che $g(z)$ è indipendente da k, è la stessa per tutti i valori di k.

   Si ha $g'(z_k) = h_k(z_k)$, quindi il residuo in z_k di $f(z)/g(z)$ è
$$\mathrm{Res}_{z=z_k} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_k)}{g'(z_k)} = \frac{e^{iaz_k}}{4z_k^3} \ .$$
   Altra osservazione utile per semplificare i conti è che essendo $z_k^4 = -1$ segue che z_k^3 può essere sostituito da $-z_k^{-1}$. Quindi
$$I_1(a) = 2\pi i\left(\frac{e^{iaz_0}}{4z_0^3} + \frac{e^{iaz_1}}{4z_1^3}\right) = \frac{\pi}{2i}\sum_{k=0}^{1} z_k e^{iaz_k} = \frac{\pi}{2i} e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(e^{\frac{i}{4}\pi + ia\frac{\sqrt{2}}{2}} + e^{\frac{3i}{4}\pi - ia\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2i} e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(e^{\frac{i}{4}\pi + ia\frac{\sqrt{2}}{2}} - e^{-\frac{i}{4}\pi - ia\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) = \pi e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ .$$

Per quanto riguarda il calcolo di $I_2(a)$, si osservi che ponendo $x = ay$, si ha

$$I_2(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^4 + a^4} dx = \frac{1}{a^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ay)}{y^4 + 1} dy = \frac{1}{a^3} \Re I_1(a) = \frac{1}{a^3} I_1(a) \ ,$$

cioè

$$I_2(a) = \frac{\pi}{a^3} e^{-a\frac{\sqrt{2}}{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \ , \qquad a > 0 \ .$$

4. Si noti che

$$F_a(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) e^{iax} u(x) dx \ ,$$

ed essendo $\theta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $e^{iax} \in \Theta_M(\mathbb{R})$, cosicché, $e^{iax}u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, segue che $F_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

5. Si ha

$$(\frac{d}{dx}(\theta(x)e^{iax}), u(x)) = -(\theta(x)e^{iax}, u'(x)) = -\int_0^{+\infty} e^{iax} u'(x) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{de^{iax}}{dx} u(x) dx - e^{iax} u(x)\Big|_0^{+\infty} = ia \int_0^{+\infty} e^{iax} u(x) dx + u(0) \ ,$$

che corrisponde alla relazione

$$F_a' - iaF_a = \delta \ .$$

Si noti che nell'ultima uguaglianza si è utilizzato il fatto che la funzione di prova $u(x)$, e quindi la funzione di prova $e^{iax}u(x)$, è nulla all'infinito. Lo stesso risultato lo si ottiene osservando che

$$(e^{iax}\theta(x))' = iae^{iax}\theta(x) + e^{iax}\theta(x)' = iae^{iax}\theta(x) + e^{iax}\delta(x) = iae^{iax}\theta(x) + \delta(x) \ ,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la relazione

$$f(x)\delta(x - x_0) = f(x_0)\delta(x - x_0) \ .$$

6. Si ha

$$\log(x \pm i0) = \lim_{y \to +0} \log(x \pm iy) = \log|x| + i \lim_{y \to +0} \arg(x \pm iy) = \log|x| \pm i\pi\theta(-x) \ .$$

Quindi

$$\Im \log(x - i0) = \frac{1}{2i}(\log(x - i0) - \log(x + i0)) = -\pi\theta(-x) \ .$$

D'altronde

$$\frac{d\theta(-x)}{dx} = -\frac{d\theta(-x)}{d(-x)} = -\delta(-x) = -\delta(x) \ ,$$

quindi

$$\frac{d}{dx}\Im\log(x-i0)=\pi\delta(x)\ ,$$

e

$$\frac{d^2}{dx^2}\Im\log(x-i0)=\pi\delta^{(1)}(x)\ ,$$

cioè

$$(\frac{d^2}{dx^2}\Im\log(x-i0),u(x))=(\pi\delta^{(1)}(x),u(x))=-\pi(\delta(x),u'(x))=-\pi u'(0)\ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 01.07.2009

1. Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si determini, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = x^2 - y^2 - 2xy \ .$$
Si determini un possibile polinomio in x, y, $g(x, y)$, non contenente i termini x^3 e y^3, e tale che
$$\partial_z \partial_{\bar{z}}(x^3 + y^3 + g(x, y)) = 0 \ .$$

2. Si descrivano tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{1}{e^z - e^{z^2}} \ , \qquad z \in \mathbb{C} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z+1)^2} dz \ .$$

4. Si calcoli l'integrale
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 - \frac{\pi^2}{4}} dx \ .$$

5. Dopo aver dimostrato che il funzionale $((x^3 - 1)\theta''(x) + x\delta(-x), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata, se ne calcoli la derivata.

6. Si calcoli la derivata del funzionale $(|x| + (x-1)\delta(-2x+1), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. $\Re f(z) = \frac{1}{4}(z+\bar z) + \frac{1}{4}(z-\bar z)^2 + \frac{i}{2}(z+\bar z)(z-\bar z) = \frac{1}{2}(1+i)z^2 + \frac{1}{2}(1-i)\bar z^2 = \Re[(1+i)z^2]$, quindi $f(z) = (1+i)z^2 + ic$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

   Si ha
$$(\partial_x^2 + \partial_y^2)(x^3 + y^3) = 6x + 6y = (\partial_x^2 + \partial_y^2)(3x^2y + 3xy^2) \ ,$$
   quindi $g(x,y) = -3x^2y - 3yx^2$.

2. $e^z - e^{z^2}$ si annulla quando $z^2 = z + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè per $z_{k,\pm} = \frac{1\pm\sqrt{1+8k\pi i}}{2}$. Si ricordi che se una funzione ha uno zero di ordine $n+1$ in un dato punto, allora le sue derivate di ordine minore od uguale ad n sono nulle in quel punto. Poiché $e^{z_{k,\pm}} = e^{z^2_{k,\pm}}$, si ha $\partial_z(e^z - e^{z^2})_{z=z_{k,\pm}} = e^{z_{k,\pm}}(1 - 2z_{k,\pm}) \neq 0$, quindi $f(z)$ ha poli singoli in $z_{k,\pm}$. D'altronde il punto all'infinito è punto d'accumulazione di poli per $f(z)$, per cui tale punto è singolarità essenziale non isolata. Che ∞ sia punto d'accumulazione di poli lo si vede più direttamente utilizzando la coordinata $w = z^{-1}$, infatti i punti $w_{k,\pm} = z^{-1}_{k,\pm}$ si addensano a $w = 0$ per $k \to \pm\infty$. Quindi $w = 0$ è punto d'accumulazione di poli di $g(w) := f(\frac{1}{w})$, come tale $w = 0$ ($z = \infty$) è singolarità essenziale non isolata di $g(w)$ ($f(z)$).

3. Sviluppando in serie l'esponenziale intorno a $z = -1$, si ha (si osservi che $e^z = e^{-1}e^{z+1}$)
$$\frac{e^z}{(z+1)^2} = e^{-1}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(z+1)^{k-2} \ .$$
   Poiché il coefficiente del termine $(z+1)^{-1}$ è e^{-1}, l'integrale vale $2\pi i e^{-1}$; risultato ottenibile immediatamente usando la rappresentazione integrale di Cauchy.

4. L'integrando è una funzione pari, quindi
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}dz \ .$$
   Poiché non ci sono singolarità sul cammino d'integrazione, possiamo deformarlo in modo tale da aggirare i punti $\pm\pi/2$. Scegliamo un contorno C, deformazione continua dell'asse reale, che passi sopra $\pm\pi/2$ e usiamo $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$. In tal modo si ottiene
$$I = \frac{1}{4}\int_C \frac{e^{iz}}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}dz + \frac{1}{4}\int_C \frac{e^{-iz}}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}dz \ .$$
   Si noti che ora ogni singolo integrale ha due singolarità ma non sono sul cammino di integrazione. Si consiglia di riflettere su questa procedura, punto su cui molti studenti hanno sbagliato: prima si usa il teorema di Cauchy per modificare il cammino di integrazione e poi si considera lo split della funzione integranda.

   Grazie al lemma di Jordan possiamo chiudere il cammino di integrazione del primo integrale in $\Im z > 0$. Il risultato è 0 perché il contorno non racchiude alcuna singolarità. Nel caso del secondo integrale il cammino va chiuso nel semipiano inferiore. Poiché il contorno risultante è orientato in senso orario, il risultato è $-2\pi i$ la somma dei residui dell'integrando in $\pm\pi/2$

$$I = -\frac{\pi i}{2}\Big(\mathrm{Res}_{z=-\pi/2}\frac{e^{-iz}}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}+\mathrm{Res}_{z=\pi/2}\frac{e^{-iz}}{z^2-\frac{\pi^2}{4}}\Big) = \frac{i}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}-\frac{i}{2}e^{-i\frac{\pi}{2}} = -1\ .$$

5. Si noti che $\theta''(x)=\delta'(x)$, che è una distribuzione temperata e che $x\delta(x)=0$ (e $\delta(-x)=\delta(x)$). Poiché $(x^3+1)\in\Theta_M(\mathbb{R})$, segue che il funzionale considerato appartiene ad $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Equivalentemente

$$((x^3-1)\theta''(x)+x\delta(-x),u(x)) = (\delta'(x),(x^3-1)u(x))$$
$$= -(\delta(x),3x^2u(x)+(x^3-1)u(x)) = u'(0)\le ||u||_{0,1}\ ,$$

da cui, tra l'altro, segue che il funzionale è equivalente a

$$-\delta'(u) = (-\delta'(x),u(x)) = u'(0)\ ,$$

ovvero $(x^3-1)\theta''(x)+x\delta(-x) = -\delta'(x)$. Quindi la derivata richiesta è $-\delta''(u) = (-\delta''(x),u(x)) = -u''(0)$.

6. Si noti che $|x| = x\mathrm{sgn}\,x = x(\theta(x)-\theta(-x))$. Quindi

$$\frac{d}{dx}|x| = \theta(x)-\theta(-x)+x(\delta(x)+\frac{d}{d(-x)}\theta(-x)) = \mathrm{sgn}\,x+2x\delta(x) = \mathrm{sgn}\,x\ .$$

Usando $\delta(-2x+1)=\frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})$ e $\frac{x-1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})=-\frac{1}{4}\delta(x-\frac{1}{2})$, si ha

$$\frac{d}{dx}(|x|+\frac{x-1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})) = \mathrm{sgn}x-\frac{1}{4}\frac{d}{dx}\delta(x-\frac{1}{2})\ .$$

Equivalentemente

$$(\frac{d}{dx}(|x|+\frac{x-1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})),u(x)) = -(|x|+\frac{x-1}{2}\delta(x-\frac{1}{2}),u'(x))$$
$$= -(|x|,u'(x))+\frac{1}{4}u'(1/2)\ ,$$

e

$$-(|x|,u'(x)) = -\int_0^{+\infty}xu'(x)dx+\int_{-\infty}^0 xu'(x)dx$$
$$= -xu(x)|_0^{+\infty}+xu(x)|_{-\infty}^0+\int_0^{+\infty}u(x)dx-\int_{-\infty}^0 u(x)dx = (\mathrm{sgn}\,x,u(x))\ ,$$

dove si è usato $u(\pm\infty)=0$.

Molti studenti hanno riportato un'errata versione della relazione

$$\delta(-2x+1) = \frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})\ ,$$

che segue da

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(c^{-1}(x-a))u(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(y)u(cy+a)|c|dy = |c|u(a)\ ,$$

dove a e c sono costanti. Questo è un caso particolare della relazione

$$\delta(y(x)) = \frac{1}{|y'(x)|}\sum_{i=1}^{n}\delta(x-x_i) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\delta(x-x_i)}{|y'(x_i)|} \ ,$$

che è utilizzata spesso in letteratura.

Alcuni studenti, nel determinare $\delta(-2x+1)$, non hanno cambiato il segno agli estremi di integrazione nel cambio di variabile $y = 1-2x$, equivalente ad un segno meno globale che cancella quello in $-dy$. Questo è un'esempio di come mai si considera il *modulo* della Jacobiana nel cambio di coordinate di integrazione.

Un altro errore è stato utilizzare prima la notazione corretta

$$\delta'(-2x+1) := \frac{d}{d(-2x+1)}\delta(-2x+1) \ ,$$

per poi, nell'integrare per parti, identificare $\frac{d}{d(-2x+1)}u(x)$ con $u'(x) = \frac{d}{dx}u(x)$, una sorta di "distrazione da notazione". Il cambio della variabile di derivazione, da x ha $-2x+1$ è stato fatto solamente per utilizzare il simbolo $'$ piuttosto che $\frac{d}{dx}$. Sarebbe stato meglio utilizzare subito $\delta(-2x+1) = \frac{1}{2}\delta(x-\frac{1}{2})$ poiché $\frac{d}{dx}\delta(x-\frac{1}{2}) = \delta'(x-\frac{1}{2})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 13.07.2009

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

   A. $\Re f(z) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$,

   B. $\int_{|z|=1} f^2(z)dz = 4\pi e^{\frac{i}{4}\pi}$.

2. Si descrivano le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\cos\frac{1}{z^2}} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{|z|=1} \frac{e^{4z^2+4z} + z + 1}{(2z+1)^2} dz \ .$$

4. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x-\pi)(x+\pi)} dx \ .$$

5. Dopo aver mostrato che

$$(x\frac{d^3}{dx^3}\theta(2x-1) - \frac{d}{dx}\delta(4x-1), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   è una distribuzione temperata, se ne calcoli la derivata.

6. Si calcoli la derivata della distribuzione temperata

$$((x-1)\delta(1-2x^2), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

1. A. $\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{z+\bar{z}-iz+i\bar{z}}{2z\bar{z}}$. Quindi $f(z) = \frac{1+i}{z} + ic$, con c costante reale.

   B. Si ha $\oint_{|z|=1} f^2(z)dz = 4\pi ic(i-1)$ quindi $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, e $f(z) = \frac{1+i}{z} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

2. $z = 0$ è singolarità essenziale di f in quanto punto d'accumulazione dei punti
$$z_{\pm,k} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(2k+1)\pi}} \ , \quad k \in \mathbb{Z} \ ,$$
corrispondenti a poli del primo ordine di f.

3. Riscrivendo l'integrando nella forma
$$\frac{e^{-1}e^{(2z+1)^2}}{(2z+1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(2z+1)^2} \ ,$$
è immediato osservare che il valore dell'integrale richiesto è $\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{1}{2z+1} = \pi i/2$. Ovviamente lo stesso risultato segue considerando la rappresentazione integrale di Cauchy della derivata di una funzione analitica.

4. L'integrando è una funzione pari, per cui l'integrale è equivalente a
$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x-\pi)(x+\pi)}dx \ .$$
Essendo l'integrando non singolare sul cammino d'integrazione, è possibile modificarlo con continuità ad un contorno C che passi al di sopra dei punti $x = 0, \pm\pi$. Si ha
$$\frac{1}{4i}\Big(\int_C \frac{e^{ix}}{x(x-\pi)(x+\pi)}dx + \int_C \frac{e^{-ix}}{x(x-\pi)(x+\pi)}dx\Big) \ .$$
Il contorno del primo integrale è chiudibile alla Jordan sul semipiano superiore, ed è quindi nullo perché non racchiude singolarità. Nel caso del secondo integrale il contorno è chiudibile sul semipiano inferiore. Il risultato è dato da $2\pi i/(4i)$ volte la somma dei residui di $\frac{e^{-ix}}{x(x-\pi)(x+\pi)}$ nei punti $x = 0, \pm\pi$, cioè
$$\frac{2\pi i}{4i}\Big(\frac{e^{i\pi}}{2\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} + \frac{e^{-i\pi}}{2\pi^2}\Big) = -\frac{1}{\pi} \ .$$

5. Poiché
$$\frac{d}{dx}\theta(2x-1) = 2\frac{d}{d(2x-1)}\theta(2x-1) = 2\delta(2x-1) = \delta(x-\frac{1}{2}) \ ,$$
si ha
$$(x\frac{d^3}{dx^3}\theta(2x-1), u(x)) = (\delta(x-\frac{1}{2}), (xu(x))'') \ ,$$
ed essendo $\delta(4x-1) = \frac{1}{4}\delta(x-\frac{1}{4})$
$$(x\frac{d^3}{dx^3}\theta(2x-1) - \frac{d}{dx}\delta(4x-1), u(x)) = 2u'(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}u''(\frac{1}{2}) + \frac{1}{4}u'(\frac{1}{4}) \ ,$$

che è un numero finito in quanto $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. L'ultima relazione implica anche

$$x\frac{d^3}{dx^3}\theta(2x-1) - \frac{d}{dx}\delta(4x-1) = -2\delta'(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\delta''(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\delta'(x-\frac{1}{4}) \ ,$$

per cui la derivata richiesta è

$$-2\delta''(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}\delta'''(x-\frac{1}{2}) - \frac{1}{4}\delta''(x-\frac{1}{4}) \ .$$

6.

$$(x-1)\delta(1-2x^2) = \frac{\sqrt{2}(x-1)}{4}\delta(x-\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{\sqrt{2}(x-1)}{4}\delta(x+\frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{1-\sqrt{2}}{4}\delta(x-\frac{1}{\sqrt{2}}) - \frac{1+\sqrt{2}}{4}\delta(x+\frac{1}{\sqrt{2}}) \ .$$

$$-\frac{1-\sqrt{2}}{4}(\delta(x-\frac{1}{\sqrt{2}}), u'(x)) + \frac{1+\sqrt{2}}{4}(\delta(x+\frac{1}{\sqrt{2}}), u'(x))$$

$$= -\frac{1-\sqrt{2}}{4}u'(\frac{1}{\sqrt{2}}) + \frac{1+\sqrt{2}}{4}u'(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 7.09.2009

1. Sia $z = x+iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si determini, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che $\Re f(z) = 2e^{\frac{y}{x^2+y^2}} \cos \frac{x}{x^2+y^2}$.

2. Si identifichino le singolarità e si calcolino i residui della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{i}{z-1}}}{z^2-1} \;, \qquad\qquad z \in \mathbb{C} \;.$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)^2}{x^6+1} dx \;.$$

4. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^3 x + i(\cos x - 1)^2}{x^3} dx \;.$$

5. Si mostri che

$$(x \frac{d^2}{dx^2}(\theta(1-3x) + \theta(2x-1)) - \frac{d}{dx}\delta(2x-1), u(-x)) \;, \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \;,$$

è un numero finito.

1. $2e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2} = e^{\frac{i\bar z}{|z|^2}} + e^{-\frac{iz}{|z|^2}} = 2\Re e^{\frac{i}{z}}$, quindi $f(z) = 2e^{\frac{i}{z}}$.

2. $f(z)$ ha una singolarità essenziale isolata in $z = 1$ ed un polo del primo ordine in $z = -1$. Per il calcolo del residuo nel punto $z = 1$, trattandosi di singolarità essenziale (isolata) sviluppiamo in serie di Laurent

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}e^{\frac{i}{z-1}} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-1}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-2)^{-j}}{k!}i^k(z-1)^{j-k} \ .$$

Il coefficiente di $(z-1)^{-1}$ è quindi $\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}(-i/2)^j = \frac{1}{2}e^{-\frac{i}{2}}$. Il calcolo del residuo in $z = -1$ è immediato: $\lim_{z\to-1}(z+1)f(z) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{i}{2}}$, pari all'opposto del residuo in $z = 1$. Poiché non vi sono singolarità non isolate, la somma di tutti i residui deve esser nulla, quindi il residuo all'infinito è nullo. Questo lo si vede anche direttamente poiché $f(z) \sim z^{-2}$ per $z \to \infty$. In proposito è istruttivo riportare l'intero sviluppo per $z \to \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}e^{\frac{i}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}} = \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty}z^{-2j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\Big(\frac{i}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\Big)^k$$

$$= \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty}z^{-2j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{i^k}{k!}\Big(\sum_{l=0}^{\infty}z^{-l-1}\Big)^k \ .$$

Si osservi che sarebbe stato sufficiente calcolare il residuo in $z = -1$, quindi osservare che $f(z) \sim z^{-2}$ per $z \to \infty$, che appunto implica l'assenza di residuo all'infinito, per dedurre il valore del residuo in $z = 1$.

3. Poiché l'integrale di funzione dispari rispetto a intervallo simmetrico è nullo, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^6+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^6+1}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^4-x^2+1}dx = \pi \ .$$

Riportiamo il conto dettagliato solo nel caso, di poco più lungo, in cui si considera il secondo dei tre integrali (quindi senza ulteriore semplificazione). Chiudendo alla Jordan nel piano complesso superiore il calcolo dell'integrale si riduce al calcolo dei residui nei punti $e^{\pi i/6}$, $e^{\pi i/2}$ e $e^{5\pi i/6}$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^6+1}dx = \frac{\pi i}{3}\Big(e^{-5\pi i/6}+e^{-5\pi i/2}+e^{-25\pi i/2}\Big) = \frac{\pi i}{3}\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}-i-\frac{i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \frac{2\pi}{3},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{x^6+1}dx = \frac{\pi i}{3}\Big(e^{(2-5)\pi i/6}+e^{(2-5)\pi i/2}+e^{(10-25)\pi i/2}\Big) = \frac{\pi i}{3}(-i+i-i) = \frac{\pi}{3},$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+1)^2}{x^6+1}dx = \frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3} = \pi \ .$$

4. $\frac{(\cos x-1)^2}{x^3}$ è funzione dispari e l'integrale è equivalente a $I = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}dx$. Deformiamo il cammino d'integrazione con continuità ad un contorno C

che passi sopra il punto $x = 0$. Usando la formula di Eulero, è immediato verificare che gli unici contributi non nulli all'integrale sono

$$-\frac{3}{8i}\int_C \frac{e^{-iz}}{z^3}dz + \frac{1}{8i}\int_C \frac{e^{-3iz}}{z^3}dz \ ,$$

che possono esser chiusi alla Jordan nel piano complesso inferiore. Il calcolo dei residui da infine $I = \frac{3\pi}{4}$.

5. Cambiando variabile da x a $y = -x$ e denotando la variabile d'integrazione nuovamente con x si ha

$$(-x\frac{d^2}{dx^2}(\theta(1+3x) + \theta(-2x-1)) + \frac{d}{dx}\delta(2x+1), u(x)) \ . \qquad (1)$$

L'espressione proposta equivale quindi alla distribuzione $-x\frac{d^2}{dx^2}(\theta(1+3x)+\theta(-2x-1))+\frac{d}{dx}\delta(2x+1)$, che è temperata in quanto somma di distribuzioni temperate: si ricordi che se $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ e $h \in \Theta_M(\mathbb{R})$, allora $fh = hf \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Essendo una distribuzione temperata segue che Eq.(1) è un numero finito.

Lo stesso risultato lo si ottiene dal calcolo diretto. In proposito si noti che $\delta(\alpha x + 1) = \frac{1}{|\alpha|}\delta(x + \frac{1}{\alpha})$. Si osservi anche l'ovvia relazione $\theta(\alpha x) = \mathrm{sgn}(\alpha)\theta(x) + \frac{1}{2}(1 - \mathrm{sgn}(\alpha))$, quindi, in particolare, $\theta(ax+1) = \theta(x + \frac{1}{a})$, $\forall a > 0$, e $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$. Osservando che $\frac{d}{dx}(\theta(1+3x) - \theta(1+2x)) = \delta(x + \frac{1}{3}) - \delta(x + \frac{1}{2})$, si ha

$$(-x\frac{d}{dx}(\delta(x+\frac{1}{3}) - \delta(x+\frac{1}{2})) + \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\delta(x+\frac{1}{2}), u(x)) =$$

$$= u(-\frac{1}{3}) - \frac{1}{3}u'(-\frac{1}{3}) - u(-\frac{1}{2}) \ ,$$

che è un numero finito in quanto $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 22.09.2009

1. Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. Si determini, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = \left(e^{\frac{y}{x^2+y^2}} + e^{\frac{-y}{x^2+y^2}} \right) \cos \frac{x}{x^2+y^2} \ .$$

2. Si identifichino le singolarità e si calcolino i residui della funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{\sin \pi z} \ , \qquad\qquad z \in \mathbb{C} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_C z e^{z^2} dz \ ,$$

   a) quando C è il segmento di retta congiungente i punti i e $2 - i$,

   b) quando C è l'arco di parabola $y = x^2$ congiungente i punti 0 e $1 + i$.

4. Si calcoli l'integrale

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{x^2 - (2k+1)^2} dx \ , \qquad k \in \mathbb{N} \ .$$

5. Si calcoli

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} x^{n-k} \frac{d^k}{dx^k} \lim_{y \to +0} (\log(x + iy) - \log(x - iy)), u(x) \Big) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   a) per $n = 3$,

   b) per $n \in \mathbb{N}_+$ (facoltativo).

1.

$$\left(e^{\frac{y}{x^2+y^2}}+e^{\frac{-y}{x^2+y^2}}\right)\cos\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{y}{x^2+y^2}}+e^{\frac{-y}{x^2+y^2}}\right)\left(e^{\frac{ix}{x^2+y^2}}+e^{\frac{-ix}{x^2+y^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(e^{\frac{i}{z}}+e^{-\frac{i}{z}}+e^{\frac{i}{\bar z}}+e^{-\frac{i}{\bar z}})=2\Re\cos\frac{1}{z}\ .$$

Quindi $f(z)=2\cos\frac{1}{z}$.

2. Il termine $e^{\frac{1}{z}}$ ha una singolarità essenziale isolata in $z=0$ mentre $1/\sin\pi z$ ha poli semplici nei punti $z=k$, $k\in\mathbb{Z}$, e una singolarità essenziale non isolata all'infinito (essendo quest'ultimo punto d'accumulazione di poli). I residui nei punti $z_k=k$, $k\in\mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sono

$$R_k(f)=\lim_{z\to k}(z-k)\left(e^{\frac{1}{z}}+\frac{1}{\sin\pi z}\right)=\frac{(-)^k}{\pi}\ .$$

Per il residuo in 0 bisogna aggiungere a $\frac{1}{\pi}$, dovuto al termine $\frac{1}{\sin\pi z}$, il contributo di $e^{\frac{1}{z}}$. Quest'ultimo, come usuale, è calcolabile sviluppando in serie di Laurent: $e^{\frac{1}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{-k}}{k!}$. Essendo 1 il coefficiente del termine $1/z$, il residuo in 0 di $f(z)$ è $\frac{1}{\pi}+1$.

Si noti che $f(z)$ non ha residuo all'infinito in quanto, come detto, questo è singolarità essenziale non isolata. È comunque istruttivo considerare il residuo all'infinito relativo solamente al termine $e^{\frac{1}{z}}$. A questo proposito si osservi che il suo sviluppo in serie per $z\to\infty$ è lo stesso del precedente. Si vede quindi immediatamente che la somma dei residui di $e^{\frac{1}{z}}$ è, come deve essere, nulla (si ricordi che il residuo all'infinito è pari all'opposto del coefficiente del termine $1/z$ nello sviluppo in serie).

3. La primitiva è la funzione $\frac{1}{2}e^{z^2}$. Poiché l'integrando è una funzione analitica, l'integrale non dipende dal cammino. I valori degli integrali sono a) $\frac{1}{2}(e^{3-4i}-e^{-1})$, b) $\frac{1}{2}(e^{2i}-1)$.

4. Per ogni $k\in\mathbb{N}$ deformiamo il contorno con continuità in modo tale che il nuovo cammino d'integrazione passi sopra i punti $z_k=\pm(2k+1)$. Utilizzando la relazione $\cos\frac{\pi x}{2}=(e^{\frac{i\pi z}{2}}+e^{-\frac{i\pi z}{2}})/2$, il calcolo di I_k è equivalente ad un semplice calcolo di residui

$$I_k=\frac{1}{2}\int_{\Gamma_k}\frac{e^{-\frac{i\pi z}{2}}}{z^2-(2k+1)^2}dz=(-)^{k+1}\frac{\pi}{2k+1}\ ,\qquad k\in\mathbb{N}\ ,$$

dove Γ_k sono i cammini ottenuti chiudendo i precedenti alla Jordan nel semipiano complesso inferiore.

5. Essendo

$$\lim_{y\to+0}\log(x\pm iy)=\log|x|+i\lim_{y\to+0}\arg(x\pm iy)=\log|x|\pm i\pi\theta(-x)\ ,$$

l'espressione proposta è equivalente a

$$-2\pi i\Big(\sum_{k=1}^{n}x^{n-k}\delta^{(k-1)}(x),u(x)\Big)=2\pi i\sum_{k=1}^{n}(-)^k(x^{n-k}u(x))^{(k-1)}_{|x=0}\ ,$$

che per $n = 3$ vale $2\pi i(u(0) - u''(0))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Per quanto riguarda il calcolo nel caso di n intero positivo arbitrario, si noti che utilizzando la formula di Leibniz per le derivate del prodotto di funzioni si ha

$$\sum_{k=1}^{n} (-)^k (x^{n-k} u(x))^{(k-1)} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} (-)^k \binom{k-1}{j} x^{n-k}{}^{(j)} u(x)^{(k-1-j)} \ .$$

Esplicitando le derivate delle potenze di x, l'espressione precedente diventa

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} (-)^k j! \binom{n-k}{j} \binom{k-1}{j} x^{n-k-j} u(x)^{(k-1-j)} \ , \tag{1}$$

dove $\binom{p}{q} := 0$, $\forall p, q \in \mathbb{N}$, tali che $p - q < 0$, che tiene conto del fatto che le derivate delle potenze di x son nulle se di ordine maggiore della potenza stessa. Nel caso in esame quest'ultima condizione si può esprimere molto semplicemente modificando l'intervallo su cui è eseguita la sommatoria. Infatti, poiché (1) va calcolata in $x = 0$, segue che i termini che non soddisfano la relazione $n - k - j = 0$ sono nulli. Possiamo quindi eliminare la sommatoria su j sostituendo j con $n - k$. In particolare, poiché $\binom{k-1}{j} = \binom{k-1}{n-k}$, segue che la condizione $\binom{k-1}{n-k} \neq 0$, cioè $k \geq (n+1)/2$, è riscrivibile modificando il limite inferiore della rimanente sommatoria su k. In conclusione, l'espressione richiesta al punto b) è

$$2\pi i \sum_{k \in \mathbb{N}_+, k \geq \frac{n+1}{2}}^{n} (-)^k (n-k)! \binom{k-1}{n-k} u(0)^{(2k-n-1)} \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 14.05.2010

1. Si verifichi se
$$\frac{2x}{x^2+y^2} - y \ ,$$
$x, y \in \mathbb{R}$, è la parte reale di una funzione analitica. In caso affermativo la si determini.

2. Si descrivano tutte le singolarità e si calcolino i residui della funzione
$$f(z) = \frac{1}{4z-\pi} \frac{\tan(2z)}{\sin z} \ ,$$
$z \in \mathbb{C}$.

3. Si calcolino gli integrali
$$I_1(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2 - \pi^2 n^2} dx \ ,$$
$n \in \mathbb{N}_+$
$$I_2(n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2(2n+1)^2} dx \ ,$$
$n \in \mathbb{N}$.

Problemi Facoltativi

1. Si supponga che $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty$ e $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| = \infty$, $a_n \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si provi che il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, è 1.

2. Si descriva l'immagine sia del semipiano superiore $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ che dell'asse reale $\{z \in \mathbb{C} | \Im z = 0\}$ sotto la mappa
$$W : z \mapsto \frac{z-i}{z+i} \ .$$
Si dica, giustificando la risposta, se tale trasformazione e/o la sua inversa sono conformi. Si determini infine l'espressione che la metrica di Poincaré su $\mathcal{H}$
$$ds^2 := \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} \ ,$$
assume sotto W.

1. Se una funzione su $\mathbb{R}^2$ è la parte reale o immaginaria di una funzione analitica (in qualche dominio), questa deve essere nel kernel del laplaciano $\Delta := \partial_x^2 + \partial_y^2$. Nel caso in esame si verifica immediatamente che

$$\Delta\Big(\frac{2x}{x^2+y^2} - y\Big) = 0 \ .$$

Per determinare la funzione analitica associata, basta osservare che

$$\frac{2x}{x^2+y^2} - y = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2} + \frac{i}{2}(z-\bar{z}) = \frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} + \frac{1}{2}(iz + \overline{iz}) = \Re\Big(\frac{2}{z} + iz\Big) \ ,$$

per cui la funzione richiesta è $2z^{-1}+iz+ic$, con c costante reale arbitraria.

2. Alcune singolarità sono apparenti in quanto la funzione si semplifica:

$$f(z) = \frac{1}{4z-\pi}\frac{2\cos z}{\cos(2z)} \ .$$

Le singolarità rimanenti sono

- Poli semplici per $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

- Polo doppio per $z_0 = \frac{\pi}{4}$.

- Il punto all'infinito è punto d'accumulazione di poli (e di zeri), quindi è una singolarità essenziale non isolata.

Per quanto riguarda i residui, si osservi che questo non è definito nel caso del punto all'infinito, infatti, essendo questo punto d'accumulazione di poli, non può neppure esistere alcuna curva chiusa che racchiuda come unica singolarità il punto all'infinito, condizione preliminare per definire il concetto di residuo.

Calcoliamo i residui in $z = z_k$. Si ponga $R_k := \{\mathrm{Res} f(z)\}_{z=z_k}$. Per quanto riguarda il residuo in $z = z_0$, si osservi che in tal punto $f(z)$ ha un polo del secondo ordine. È possibile utilizzare la formula generale secondo la quale una funzione $h(z)$ con polo di ordine n in $z = z_0$ ha residuo

$$\{\mathrm{Res} h(z)\}_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-z_0)^n h(z)] \ .$$

Comunque, è istruttivo calcolare il residuo sottraendo da $f(z)$ la parte invariante sotto la trasformazione $z \to -z + \pi/2$, contenendo questa le potenze pari di $z - \pi/4$ dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$. Consideriamo quindi la decomposizione

$$f(z) = \frac{1}{2}(f(z) + f(-z+\pi/2)) + \frac{1}{2}(f(z) - f(-z+\pi/2)) \ .$$

Si osservi che $\tan(2z)/(4z-\pi)$ è invariante sotto $z \to -z + \pi/2$ mentre $\sin(-z+\pi/2) = -\cos z$. Da quanto detto il residuo di $f(z)$ in $z = z_0$ corrisponde al residuo di

$$\frac{1}{2}(f(z) - f(-z+\pi/2)) = \frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\frac{\cos z - \sin z}{\cos 2z} \ .$$

Quindi

$$R_0 = \frac{1}{8}\frac{\cos z + \sin z}{\sin 2z}\Big|_{z=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8} \ .$$

Essendo $z = z_k$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, polo del prim'ordine per $f(z)$, si ha

$$R_k = \lim_{z\to z_k} \frac{2}{4z-\pi}\frac{(z-z_k)\cos z}{\cos(2z)} = \frac{(-)^{k+1}}{2k\pi}\cos(2k+1)\frac{\pi}{4} \ ,$$

$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. R_k si può anche esprimere in modo equivalente distinguendo il caso k pari, $k = 2j$, $j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, e dispari, $k = 2j+1$, $j \in \mathbb{Z}$. Infatti, si ha

$$R_{2j} = \frac{(-)^{2j+1}}{4\sqrt{2}j\pi}\Big[\cos(j\pi) - \sin(j\pi)\Big] = \frac{(-)^{j+1}}{4\sqrt{2}j\pi} \ ,$$

$j \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, e

$$R_{2j+1} = \frac{(-)^{2j+2}}{2\sqrt{2}(2j+1)\pi}\Big[\cos(2j+1)\frac{\pi}{2} - \sin(2j+1)\frac{\pi}{2}\Big] = \frac{(-)^{j+1}}{2\sqrt{2}(2j+1)\pi} \ ,$$

$j \in \mathbb{Z}$.

3. $I_1(n) = 0$ poiché l'intervallo d'integrazione è simmetrico rispetto all'origine e l'integrando è funzione dispari.

   Per quanto riguarda $I_2(n)$ si osservi che l'integrando non ha singolarità sul cammino d'integrazione (escluse due innocue singolarità apparenti). Potremmo esprimere la funzione $\cos z$ nella forma $(e^{iz} + e^{-iz})/2$ per poi utilizzare il lemma di Jordan. Comunque, si osservi che ognuna delle due funzione integrande risulterebbe avere un polo di ordine uno nel contorno d'integrazione. Per risolvere questo problema sfruttiamo il fatto che il cammino d'integrazione non contiene singolarità dell'integrando cosicché è possibile, grazie al teorema di Cauchy, modificare il contorno dell'integrale iniziale scegliendone uno coincidente con l'asse reale, eccetto per due semicerchi passanti sopra i due punti $z_\pm = \pm(2n+1)\pi/2$ (si potrebbe equivalentemente circondare le due singolarità dalla parte del piano complesso con parte immaginaria negativa, ovviamente il risultato finale non cambierebbe). Il calcolo si semplifica perché chiudendo alla Jordan uno dei due integrali risulta nullo. Rimane quindi

$$\frac{1}{2}\int_{\Gamma_R} \frac{e^{-iz}}{4z^2 - \pi^2(2n+1)} dz \ ,$$

   dove Γ_R è l'unione del contorno deformato descritto precedentemente, con estremi sull'asse reale $-R$ e $R > (2n+1)\pi/2$, con il semicerchio di raggio R centrato nell'origine e tutto contenuto nel piano complesso inferiore. Nel limite $R \to \infty$

$$I_2(n) = \frac{1}{2}\int_{\Gamma_\infty} \frac{e^{-iz}}{4z^2 - \pi^2(2n+1)} dz$$

$$= -\frac{2\pi i}{8}\left[\frac{(z-z_-)e^{-iz}}{(z-z_-)(z-z_+)}\Big|_{z=z_-} + \frac{(z-z_+)e^{-iz}}{(z-z_-)(z-z_+)}\Big|_{z=z_+}\right] = \frac{(-)^{n+1}}{2(2n+1)} \ .$$

Problemi Facoltativi

1. Se $|z| \leq 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty$, quindi il raggio di convergenza r di $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$ è almeno 1. Si consideri $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, e si supponga che $r > 1$. In proposito si osservi che un risultato del teorema di Weierstrass per le serie i cui termini sono funzioni analitiche in qualche dominio, mostra che la serie, i cui termini sono la derivata dei termini della serie originaria, converge nello stesso dominio ed è data dalla derivata della funzione rappresentante la serie stessa. Comunque, insieme all'uniforme e assoluta convergenza, questa proprietà è soddisfatta dalle serie di potenze, incluse quelle nel campo reale, fatto già noto dal corso di analisi matematica. Quindi, non solo si ha $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, ma, essendo questa una serie di potenze, il fatto che $r > 1$ implica che non solo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ma anche $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge uniformemente e assolutamente per $|z| < r$. In particolare, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge assolutamente per $|z| = 1$, cioè $\sum_{n=0}^{\infty} n|a_n| < \infty$, in contraddizione con l'ipotesi. Quindi $r = 1$. In proposito si ricorda che benché una serie di potenze e la sua derivata hanno lo stesso raggio di convergenza, questo non implica, come questo caso mostra, che l'eventuale convergenza sulla frontiera di una delle due serie implichi la convergenza sulla frontiera anche dell'altra serie.

2. Si consideri la forma polare $z = \rho e^{i\alpha}$. Il modulo quadro di $w = W(z) = \frac{z-i}{z+i}$ (W è nota come trasformazione di Cayley) è

$$|w|^2 = \frac{\rho^2 - 2\rho \sin\alpha + 1}{\rho^2 + 2\rho \sin\alpha + 1} \ .$$

Se $\Im z > 0$, allora $0 < \alpha < \pi$. In tal caso $\sin\alpha > 0$, quindi $|w| < 1$. Ciò significa che $W : \mathcal{H} \to \Delta$, con Δ il disco di raggio 1 (disco di Poincaré). D'altronde, poiché $W(z_1) = W(z_2)$ implica $z_1 = z_2$, W è una mappa iniettiva. L'asse reale corrisponde a $\alpha = 0$, in tal caso $|w| = 1$, che descrive il cerchio di raggio 1 (il bordo del disco di Poincaré). Discorso analogo vale per la trasformata inversa $z = -i(w+1)/(w-1)$. Infatti, $\Im(-i(w+1)/(w-1)) = (1-|w|^2)/|w-1|^2 > 0$ per $|w| > 1$, cioè la mappa inversa di W mappa Δ in $\mathcal{H}$. Anche questa è una mappa iniettiva in quanto $-i(w_1+1)/(w_1-1) = -i(w_2+1)/(w_2-1)$ implica $w_1 = w_2$. Segue che W è una mappa biunivoca (quindi un isomorfismo tra $\mathcal{H}$ e Δ). $W(z) = \frac{z-i}{z+i}$ è una funzione analitica su $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$, e quindi analitica su tutto $\mathcal{H}$ e la sua derivata, $2i/(z+i)^2$, non si annulla mai (eccetto all'infinito). Quindi W è una trasformazione conforme di tutto $\mathcal{H}$. Analogamente si mostra che la mappa inversa, che non è analitica in $w = 1 \notin \Delta$, infatti W mappa ∞ in 1, è una trasformazione conforme di tutto Δ.

Si osservi infine che

$$\Im z = \frac{1-|w|^2}{|w-1|^2} \ , \qquad dz = \frac{dz}{dw} dw = \frac{2i}{(w-1)^2} dw \ ,$$

cosicché

$$ds^2 := \frac{|dz|^2}{(\Im z)^2} = \frac{|dw|^2}{(1-|w|^2)^2} \ .$$

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 10.06.2010

1. Si dica, giustificando la risposta, se il funzionale lineare

$$(\cos x, u(x)) \ , \qquad u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   è una distribuzione temperata.

2. Si dimostri che il funzionale lineare

$$(x^2 \frac{d^2}{dx^2}\delta(1-3x) + \frac{d}{dx}\theta(1-3x), u(x)) \ , \qquad u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   è una distribuzione temperata e se ne determini il valore.

3. Si determini il valore della distribuzione temperata

$$(x \frac{d}{dx}\delta(x^2-4x+3) + \frac{d}{dx}\theta(3x), u(x)) \ , \qquad u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

4. Si dica, spiegando il motivo, quali tra le funzioni $e^{ix}, e^{-x^2}, x^2 e^{-x^2}, e^{-x}, e^{x}$ sono elementi di

   A. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

   B. $\Theta_M(\mathbb{R})$.

1. $(\cos x, u(x)) = (1, \cos x u(x))$. Poiché $(1, u)$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è distribuzione temperata, come segue dal fatto che $|u|_1$ è maggiorata dalle norme di u in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, ed essendo $\cos x \in \Theta_M(\mathbb{R})$, segue che $(\cos x, u(x))$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è distribuzione temperata.

2. Si osservi che $\frac{d}{dx}\theta(1-3x) = -\delta(x-1/3)$. Quindi

$$(x^2 \frac{d^2}{dx^2}\delta(1-3x) + \frac{d}{dx}\theta(1-3x), u(x)) =$$

$$\frac{1}{3}(\frac{d^2}{dx^2}\delta(x-1/3), x^2 u(x)) - (\delta(x-1/3), u(x)) = \frac{1}{3}(x^2 u)''_{x=1/3} - u(1/3)$$

$$= \frac{1}{3}(-u(1/3) + \frac{4}{3}u'(1/3) + \frac{1}{9}u''(1/3)) \ .$$

3. Si ha $x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$, quindi $\delta(x^2-4x+3) = \frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x-3))$. Inoltre, poiché $\theta(ax) = \theta(x)$ per $a > 0$, si ha

$$(x\frac{d}{dx}\delta(x^2-4x+3) + \frac{d}{dx}\theta(3x), u(x)) =$$

$$-\frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x-3), (xu)')+u(0) = -\frac{1}{2}(u(1)+u'(1)+u(3)+3u'(3))+u(0) \ .$$

4. A. $e^{-x^2}, x^2 e^{-x^2}$,
   B. $e^{ix}, e^{-x^2}, x^2 e^{-x^2}$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 16.06.2010

1. Si verifichi se xy, con $x, y \in \mathbb{R}$, è la parte reale di una funzione analitica. In caso affermativo la si determini.

2. Si determinino tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{(iz-1)\sin\frac{1}{z^2}} \ .$$

3. Si calcolino gli integrali
$$\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n} d\theta \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ ,$$
$$\oint_{C_m} \frac{e^z}{(z-m\pi i)^n} dz \ , \qquad m, n \in \mathbb{N}_+ \ ,$$
dove C_m è la circonferenza centrata nell'origine del piano complesso e di raggio $(m+1)\pi$.

4. Determinare gli eventuali possibili valori delle costanti $\alpha_i \in \mathbb{C}$ affinché
$$(e^{\alpha_1 x \operatorname{sgn} x}, u(x)) \ , \qquad (e^{\alpha_2 x}, u(x)) \ , \qquad (e^{\alpha_3 x^2}, u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
siano distribuzioni temperate.

5. Sia $\phi(x) = Ax + B$, $A \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $B \in \mathbb{R}$. Si dimostri che $u \circ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Si calcolino i valori delle due distribuzioni
$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{k=1}^{2} e^{-x^2} \frac{d^k}{dx^k} \lim_{y\to+0}(\log(x+iy) - \log(x-iy)), u(x)\Big) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
$$(\delta(x^3 - x) + \frac{d}{dx}\theta(4x) + \frac{d}{dx}\theta(1-2x), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

1. Si ha $\frac{\partial^2 xy}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 xy}{\partial y^2} = 0$. Inoltre, $f(z) = -\frac{i}{2}z^2 + ic$, con $c \in \mathbb{R}$.

2. $f(z)$ ha una singolarità essenziale non isolata in $z = 0$, dovuta al termine $1/\sin(1/z^2)$. Infatti questa ha poli nei punti $z_{k,\pm} = \pm 1/\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$, con $z = 0$ loro punto di accumulazione. Il punto all'infinito è una singolarità essenziale isolata dovuta al termine e^{-z^2}. Il punto $z = -i$ è un polo semplice.

3. Sia $z \in C$, con C il cerchio di raggio 1. Poiché $z = e^{i\theta}$, l'integrale diventa

$$\oint_C \frac{(-)^n}{2^{2n} iz} (z - z^{-1})^{2n} \ .$$

L'unico polo è nel punto $z = 0$. Il coefficiente del termine $1/z$ è $(-)^{n+1} i/2^{2n}$ volte il coefficiente della potenza 0 in z proveniente dallo sviluppo di $(z - z^{-1})^{2n}$. Tale coefficiente è $(-)^n \binom{2n}{n} = (-)^n (2n)!/(n!)^2$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n} d\theta = \frac{2\pi(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \ , \qquad n \in \mathbb{N} \ .$$

Per il secondo integrale, basta osservare che

$$\frac{e^z}{(z - m\pi i)^n} = \frac{e^{m\pi i} e^{z - m\pi i}}{(z - m\pi i)^n} = (-)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z - m\pi i)^{k-n} \ ,$$

per concludere

$$\oint_{C_m} \frac{e^z}{(z - m\pi i)^n} dz = \frac{(-)^m 2\pi i}{(n-1)!} \ .$$

4. $\Re\alpha_1 \leq 0$, $\Re\alpha_2 = 0$, $\Re\alpha_3 \leq 0$.

5. È necessario mostrare che se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $u \circ \phi \in C^\infty(\mathbb{R})$ e

$$\|u\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} u(\phi(x))| < \infty \ , \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N} \ .$$

La prima condizione è chiaramente soddisfatta visto che

$$\frac{d^\beta u(y)}{dx^\beta} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^\beta \frac{d^\beta u(y)}{dy^\beta} = A^\beta \frac{d^\beta u(y)}{dy^\beta} \ ,$$

$\forall \beta \in \mathbb{N}$, dove $y = \phi(x) = Ax + B$. Per quanto riguarda la seconda condizione, si osservi che poiché $y = \phi(x)$ è una mappa biiettiva di $\mathbb{R}$ in se stesso, è chiaro che $\sup_{x\in\mathbb{R}}$ può essere sostituito da $\sup_{y\in\mathbb{R}}$, in particolare

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha \frac{d^\beta}{dx^\beta} u(y)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |A^{\beta-\alpha} (y - B)^\alpha \frac{d^\beta u(y)}{dy^\beta}| \ ,$$

che è maggiorata da una combinazione lineare finita delle norme di u

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |A^{\beta-\alpha}(y - B)^\alpha \frac{d^\beta u(y)}{dy^\beta}| \leq |A|^{\beta-\alpha} \sum_{\gamma=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{\gamma} |B|^{\alpha-\gamma} ||u||_{\gamma,\beta} \ .$$

Quindi $u \circ \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Essendo

$$\lim_{y\to+0}\log(x\pm iy)=\log|x|+i\lim_{y\to+0}\arg(x\pm iy)=\log|x|\pm i\pi\theta(-x)\ ,$$

segue che l'espressione proposta è equivalente a

$$-\Big(\sum_{k=1}^{2}e^{-x^2}\delta^{(k-1)}(x),u(x)\Big)=\sum_{k=1}^{2}(-)^k(e^{-x^2}u(x))^{(k-1)}\Big|_{x=0}=(u'(0)-u(0))\ .$$

Il calcolo della seconda distribuzione è immediato. Si ha $\delta(x^3-x)=\delta(x)+\frac{1}{2}\delta(x-1)+\frac{1}{2}\delta(x+1)$. Inoltre $\theta(4x)=\theta(x)$ e $\theta(1-2x)=\theta(\frac{1}{2}-x)$, quindi $\frac{d}{dx}\theta(4x)+\frac{d}{dx}\theta(1-2x)=\delta(x)-\delta(x-\frac{1}{2})$ e l'espressione richiesta è

$$(\delta(x^3-x)+\frac{d}{dx}\theta(4x)+2\frac{d}{dx}\theta(1-2x),u(x))=\frac{1}{2}(u(1)+u(-1))+2u(0)-u(1/2)\ ,$$

$\forall u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 01.07.2010

1. Si determini, a meno di una costante additiva immaginaria, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = e^{-y}\frac{x\cos x + y\sin x}{x^2+y^2} \ ,$$
$x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si determinino tutte le singolarità e i residui relativi alle singolarità polari della funzione
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin z} \ .$$

3. Si calcolino gli integrali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2ax) - \sin^2(2ax)}{x(a^2x^2-\pi^2)}dx \ , \qquad a > 0 \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{x^3}dx \ .$$

4. Determinare gli eventuali possibili valori delle costanti $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, 2, 3$, affinché
$$(e^{\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x + \alpha_3 |x|}, u(x)) \ , \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
sia una distribuzione temperata.

5. Sia ϕ un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se stesso tale che le componenti $\phi_j(x)$ e $(\phi^{-1})_j(y)$ delle mappe ϕ e ϕ^{-1} e le loro derivate parziali di ogni ordine abbiano crescita al più polinomiale. Sia $J(\phi)$ la Jacobiana della trasformazione. Si verifichi che per ogni $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$
$$(f(\phi^{-1}(y)), u(y)) := (f(x), |J(\phi)| u(\phi(x))) \ ,$$
definisce effettivamente la distribuzione temperata $f \circ \phi^{-1} \equiv f(\phi^{-1}(y)) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

1. Si ha

$$\Re f(z) = \frac{e^{-y}}{2|z|^2}[x(e^{ix}+e^{-ix}) - iy(e^{ix}-e^{-ix})] = \frac{\bar{z}e^{ix-y}+ze^{-ix-y}}{2|z|^2} = \Re\frac{e^{iz}}{z}$$

quindi

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} + ic \ ,$$

dove $c \in \mathbb{R}$.

2. Il punto $z_0 = 0$ è una singolarità essenziale isolata. Il punto all'infinito è d'accumulazione di zeri per $\sin z$, quindi di poli per $f(z)$, come tale è singolarità essenziale non isolata. I punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sono poli del primo ordine con residui

$$R_k = \lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)\frac{e^{\frac{1}{z}}}{\sin z} = (-)^k e^{\frac{1}{k\pi}} \ .$$

3. Deformiamo il cammino passando sopra i punti $\pm\pi/a$ e 0, denotiamo con C questo contorno, ed esprimiamo $\sin(2ax)$ con la formula di Eulero. È immediato osservare che l'integrale proposto si riduce a

$$-\frac{1}{2i}\int_\Gamma \frac{e^{-2iax}}{x(a^2x^2-\pi^2)}dx =$$

$$-2\pi i\left(-\frac{1}{2i}\right)\left[\frac{e^{-2iax}}{a^2x^2-\pi^2}|_{x=0} + \frac{e^{-2iax}}{ax(ax-\pi)}|_{x=-\pi/a} + \frac{e^{-2iax}}{ax(ax+\pi)}|_{x=\pi/a}\right] = 0$$

dove Γ è la curva unione di C con il semicerchio di raggio infinito nel piano complesso inferiore, percorsa in senso orario (da cui il segno $-$ in $-2\pi i$).

Si mostra immediatamente che il secondo integrale è uguale al residuo in zero della funzione

$$\frac{i}{8}\frac{e^{-3ix}-3e^{-ix}}{x^3} \ ,$$

quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x + \sin^4 x}{x^3}dx = \frac{3}{4}\pi \ .$$

4. Ovviamente deve esser $\Re\alpha_1 \le 0$. Ci sono due casi:

A. Se $\Re\alpha_1 < 0$, allora $(e^{\alpha_1 x^2+\alpha_2 x+\alpha_3|x|}, u(x))$ è una distribuzione temperata per ogni $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$.

B. Nel caso $\Re\alpha_1 = 0$, si osservi che $\alpha_2 x + \alpha_3|x| = (\alpha_2+\alpha_3)x$ per $x > 0$ e $\alpha_2 x + \alpha_3|x| = (\alpha_2-\alpha_3)x$ per $x < 0$. Affinché $e^{\alpha_2 x+\alpha_3|x|}$ sia decrescente per $x \to \pm\infty$, è quindi necessario che $\Re(\alpha_2+\alpha_3) \le 0$ e $\Re(\alpha_2-\alpha_3) \ge 0$. Segue che per $\Re\alpha_1 = 0$ l'espressione proposta corrisponde ad una distribuzione temperata solo se

$$\Re\alpha_3 \le -|\Re\alpha_2| \ .$$

5. Sia $v(x) := |J(\phi(x))|u(\phi(x))$. È necessario mostrare che $|(f(x), v(x))|$ è maggiorato da una combinazione lineare finita

$$|(f(x), v(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \|u\|_{\alpha,\beta} \ . \tag{1}$$

Osserviamo che se $\|v\|_{\alpha,\beta}$ fosse maggiorata da una combinazione lineare finita di $\|u\|_{\alpha,\beta}$, allora la maggiorazione cercata sarebbe una diretta conseguenza. Infatti, tale maggiorazione di $\|v\|_{\alpha,\beta}$ implicherebbe che $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, quindi, essendo per ipotesi

$$|(f(x), u(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} \|u\|_{\alpha,\beta} \ , \qquad \forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ ,$$

si avrebbe anche

$$|(f(x), v(x))| \leq \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta} \|v\|_{\alpha,\beta} \ ,$$

visto che $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. D'altronde questa relazione e la maggiorazione ipotizzata implicherebbero anche Eq.(1). Resta quindi da mostrare che $\|v\|_{\alpha,\beta}$ è effettivamente maggiorata da una combinazione lineare finita di $\|u\|_{\alpha,\beta}$. A tal fine si noti che $J(\phi)$ cresce al più polinomialmente, quindi è un elemento di $\Theta_M(\mathbb{R}^n)$, ed il problema si riduce a dimostrare la maggiorazione di $u \circ \phi$ piuttosto che di v. Quest'ultima maggiorazione la si ottiene esprimendo le derivate che compaiono nella norma di $u \circ \phi$ in termini di derivate rispetto a y_j, i termini dovuti al cambio di variabili rispetto alle quali si differenzia $u \circ \phi$ sono dati dalle derivate parziali della trasformazione che a loro volta appartengono, per ipotesi, a $\Theta_M(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, si noti che trattandosi di un diffeomorfismo di $\mathbb{R}^n$ in se stesso, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n}$ può essere sostituito con $\sup_{y\in\mathbb{R}^n}$. Infine, esprimendo le potenze di x_j nelle norme $\|u \circ \phi\|_{\alpha,\beta}$ in termini di y_j, che cresceranno al più polinomialmente in y_j, si ottiene un'espressione che è maggiorabile da una combinazione lineare finita di $\|u\|_{\alpha,\beta}$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 13.07.2010

1. Si determini, a meno di una costante additiva immaginaria, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = (e^{\frac{y}{x^2+y^2}} + e^{-\frac{y}{x^2+y^2}}) \sin \frac{x}{x^2+y^2} \ ,$$
$x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si determinino tutte le singolarità e i residui relativi alle singolarità polari della funzione
$$f(z) = \frac{e^z}{\sin z} + \frac{z}{\sin \frac{1}{z}} \ .$$

3. Si calcolino gli integrali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x/2) + \sin(\pi x)}{x^2 - 1} dx \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x + \sin^3 x}{x^2 - \pi^2} dx \ .$$

4. Dopo aver dimostrato che il funzionale $((x^2 - x)\frac{d^2}{dx^2}\theta(3x) + (3 - x)\delta(1 - 2x), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata, se ne calcoli la derivata.

5. Si calcoli la derivata del funzionale $(x|x| + (x^2 - 1)\delta(1 - x^2), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1. $f(z) = 2\sin\frac{1}{z}$.

2. I punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sono poli del prim'ordine. Il punto all'infinito è singolarità essenziale non isolata in quanto punto d'accumulazione dei poli a $k\pi$ dovuti al termine $\sin z$. Si osservi che anche e^z ha una singolarità essenziale all'infinito, ma è isolata. I punti $z = 1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono poli del prim'ordine (dovuti al termine $\sin 1/z$). Il punto $z = 0$ è una singolarità essenziale non isolata in quanto punto d'accumulazione di poli a $1/k\pi$.

   È richiesto il calcolo dei residui nei punti $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ e $1/k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathrm{Res}f(z)_{|z=k\pi} = \lim_{z\to k\pi}\frac{z-k\pi}{\sin z}e^z = \frac{1}{\cos k\pi}e^{k\pi} = (-)^k e^{k\pi} \ .$$

$$\mathrm{Res}f(z)_{|z=\frac{1}{k\pi}} = \lim_{z\to 1/k\pi}\frac{(z-\frac{1}{k\pi})z}{\sin\frac{1}{z}} = -\frac{z^3}{\cos\frac{1}{z}}|_{z=\frac{1}{k\pi}} = (-)^{k+1}(k\pi)^{-3} \ .$$

3. $\frac{\sin(\pi x)}{x^2-1}$ e $\frac{\sin^3 x}{x^2-\pi^2}$ sono dispari e non contribuiscono agli integrali. Applicando il lemma di Jordan gli integrali si riducono ad un calcolo di residui.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\pi x/2)}{x^2-1}dx = -\frac{2\pi i}{2}\sum_{z=\pm 1}\mathrm{Res}\frac{e^{-\pi i z/2}}{z^2-1} = -\pi \ .$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2-\pi^2}dx = 0 \ .$$

4. È una distribuzione temperata poiché $\delta(1-2x)$ e $\frac{d^2}{dx^2}\theta(3x) = \delta'(x)$ sono distribuzioni temperate moltiplicate per elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$. Si ha

$$(x^2-x)\frac{d^2}{dx^2}\theta(3x) + (3-x)\delta(1-2x) = (x^2-x)\delta'(x) + \frac{3-x}{2}\delta(x-1/2) \ ,$$

   la cui derivata è

$$(2x-1)\delta'(x) + (x^2-x)\delta''(x) - \frac{1}{2}\delta(x-1/2) + \frac{3-x}{2}\frac{d}{dx}\delta(x-1/2) \ .$$

   Quindi

$$((2x-1)\delta'(x)+(x^2-x)\delta''(x)-\frac{1}{2}\delta(x-1/2)+(3-x)\frac{d}{dx}\delta(x-1/2),u(x)) =$$

$$\frac{d}{dx}[(1-2x)u(x)+\frac{d}{dx}(x^2-x)u(x)]_{|x=0} - \frac{1}{2}u(1/2) - \frac{d}{dx}(\frac{3-x}{2}u(x))_{|x=1/2}$$

$$= -u'(0) - \frac{5}{4}u'(1/2) \ .$$

5. Si noti che $(x^2-1)\delta(1-x^2) = \frac{1}{2}(x^2-1)(\delta(x-1)+\delta(x+1)) = 0$. Inoltre

$$\frac{d}{dx}x|x| = \frac{d}{dx}x^2\mathrm{sgn}\,x = 2x\mathrm{sgn}x + x^2\frac{d}{dx}(\theta(x)-\theta(-x)) = 2|x| \ .$$

   La derivata richiesta è quindi $(2|x|, u(x))$, $\forall u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 07.09.2010

1. Si determini, a meno di una costante additiva immaginaria, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) \ ,$$

$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Dopo aver determinato tutti gli zeri e singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{\sin^2 z^2}{z^2 \sin z} \ ,$$

si determinino i suoi residui nelle singolarità isolate.

3. Si calcolino gli integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1-(x-1)^2]\sin(\pi x)}{(x^2+1)(x-1)} dx \ ,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 - \pi^2/4} dx \ .$$

4. Dopo aver dimostrato che il funzionale $(x\frac{d^2}{dx^2}\theta(-x) + \frac{d}{dx}\delta(x^2-1), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata, se ne calcoli la derivata.

5. Si calcoli la derivata del funzionale $(|x|+(x^2-1)\theta(-3x)+x\delta(1-x^2), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Si mostri che $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$.

1. $e^{-y}(x\cos x - y\sin x) = \frac{1}{2}e^{-y}[x(e^{ix}+e^{-ix}) + iy(e^{ix}-e^{-ix})] = \Re(ze^{iz})$.

2. $f(z)$ ha uno zero del prim'ordine in 0 e zeri doppi nei punti $\pm\sqrt{n\pi}$ e $\pm i\sqrt{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}_+$. I punti $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ sono poli del prim'ordine. Il punto all'infinito è singolarità essenziale non isolata in quanto punto d'accumulazione di poli (e di zeri). Il calcolo dei residui è immediato
$$\mathrm{Res} f(z)_{|z=k\pi} = \lim_{z\to k\pi} \frac{(z-k\pi)\sin^2 z^2}{z^2 \sin z} = (-)^k \frac{\sin^2(k\pi)^2}{(k\pi)^2} \ .$$

3. Applicando il lemma di Jordan gli integrali si riducono ad un calcolo di residui
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[1-(x-1)^2]\sin(\pi x)}{(x^2+1)(x-1)} dx = -\frac{\pi}{2}(3e^{-\pi}+1) \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^2 x}{x^2 - \pi^2/4} dx = 0 \ .$$
Svolgiamo in dettaglio il calcolo del primo integrale. Consideriamo il contorno d'integrazione deformato coincidente con la retta reale eccetto per la semicirconferenza passante sopra la singolarità apparente $x = 1$. Si osservi che affinché l'integrale corrispondente non cambi valore, tale semicirconferenza Γ, o qualsiasi altro cammino, deve passare sotto il punto $z = i$. Successivamente esprimiamo la funzione $\sin(\pi z)$ come la differenza di due esponenziali. Si osservi che, visto che il contorno passa per punti complessi, ora stiamo utilizzando la variabile complessa z. L'integrale diventa
$$I = \frac{1}{2i}\int_\Gamma \Big(\frac{e^{i\pi z}}{(z^2+1)(z-1)} - \frac{e^{-i\pi z}}{(z^2+1)(z-1)} - \frac{(z-1)e^{i\pi z}}{(z^2+1)} + \frac{(z-1)e^{-i\pi z}}{(z^2+1)} \Big) dz$$
Chiudiamo il contorno alla Jordan sul semipiano superiore nel caso dei termini contenenti $e^{i\pi z}$ e nel semipiano inferiore nel caso dei termini contenenti $e^{-i\pi z}$. Si ha
$$I = \pi \Big[\sum_{z=1,i} Res\Big\{ \frac{e^{i\pi z}}{(z^2+1)(z-1)} \Big\} - Res_{z=-i}\Big\{ -\frac{e^{-i\pi z}}{(z^2+1)(z-1)} \Big\}$$
$$+ Res_{z=i}\Big\{ -\frac{(z-1)e^{i\pi z}}{(z^2+1)} \Big\} - Res_{z=-i}\Big\{ \frac{(z-1)e^{-i\pi z}}{(z^2+1)} \Big\} \Big] \ .$$
Si osservi che due residui sono preceduti dal segno meno. Ciò è dovuto al fatto che il contorno d'integrazione risultante dalla chiusura alla Jordan nel semipiano complesso inferiore corrisponde ad un contorno chiuso orientato in senso orario.

4. È una distribuzione temperata poiché i termini della somma sono distribuzioni temperate che moltiplicano elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$. Si ha $\theta(-x) = 1-\theta(x)$, quindi $x\frac{d^2}{dx^2}\theta(-x) = -x\delta'(x)$, ed essendo $\delta(x^2-1) = \frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x+1))$, la derivata richiesta risulta
$$(-\delta'(x) - x\delta''(x) + \frac{1}{2}(\delta''(x-1)+\delta''(x+1)), u(x)) = -u'(0) + \frac{1}{2}u''(1) + \frac{1}{2}u''(-1) \ .$$

5. Poiché $\mathrm{sgn} x = \theta(x) - \theta(-x) = 2\theta(x) - 1$, la derivata richiesta è

$$(\mathrm{sgn} x + 2x\delta(x) + 2x(1-\theta(x)) - (x^2-1)\delta(x) + \frac{1}{2}\delta(x-1) + \frac{1}{2}\delta(x+1) +$$

$$\frac{x}{2}(\frac{d}{dx}\delta(x-1) + \frac{d}{dx}\delta(x+1)), u(x)) =$$

$$(\mathrm{sgn} x + 2x(1-\theta(x)), u(x)) + u(0) - \frac{1}{2}u'(1) + \frac{1}{2}u'(-1)\ .$$

6. Se due funzioni g e h assumono valori non-negativi, allora $\int_{\mathbb{R}} g(x)h(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}}\{g(x)\}h(x)dx = \sup_{x\in\mathbb{R}}\{g(x)\}\int_{\mathbb{R}} h(x)dx$. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}} |u(x)|dx = \int_{\mathbb{R}} |u(x)|\frac{1+x^2}{1+x^2}dx \leq (\|u\|_{0,0} + \|u\|_{2,0})\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx\ ,$$

dove $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}dx < \infty$, e se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ allora $u \in L^1(\mathbb{R})$. Quanto mostrato è parte della dimostrazione del teorema sull'iniezione $i : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 21.09.2010

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = \frac{y}{x^2+y^2} + x \ , \qquad f(1) = 1 \ ,$$

$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Determinare singolarità e residui della funzione

$$f(z) = \frac{e^z - e}{1 - z^2} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{C_r} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} dz \ ,$$

dove C_r è il cerchio centrato nell'origine e di raggio r, con $1 < r < \infty$, percorso in senso antiorario.

4. Si calcoli la derivata della distribuzione temperata

$$(\log(x+i0) - \log(x-i0) + \theta(1-2x) + x\delta(1-x^2), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

1. $f(z) = \frac{i}{z} + z - i$.

2. Il denominatore ha due zeri semplici, uno in -1 e l'altro in 1. Di questi solamente $z = -1$ risulta un polo (semplice) di $f(z)$ in quanto per $z = 1$ anche il numeratore ha uno zero del prim'ordine. L'altra singolarità è quella essenziale isolata all'infinito. Il residuo in $z = -1$ vale $\lim_{z\to -1} \frac{e^z - e}{1-z} = -\sinh 1$. Il residuo all'infinito lo si può calcolare in due modi. Uno immediato è utilizzare il fatto che la somma di tutti i residui è nulla, quindi all'infinito il residuo vale $\sinh 1$. L'altro modo è sviluppare la funzione in serie di Laurent intorno all'infinito

$$f(z) = -\frac{1}{z^2}\frac{e^z - e}{1 - \frac{1}{z^2}} = -\frac{1}{z^2}\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} - e\Big)\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} \ ,$$

e ricordare che il residuo all'infinito è l'opposto del coefficiente c_1 del termine $1/z$. È immediato verificare che $c_1 = -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)!} = -\sinh 1$.

3. Il valore dell'integrale è dato da $2\pi i$ volte la somma del residuo in 0, dove l'integrando ha una singolarità essenziale isolata, e in 1, dove ha un polo semplice. Il residuo in 0 è dato dal coefficiente del termine $1/z$ dello sviluppo in serie di Laurent intorno a 0. D'altronde tale sviluppo è

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = -(1 + z + z^2 + \ldots)\Big(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \ldots\Big)$$

da cui si ricava che il coefficiente del termine $1/z$ è

$$-1 - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots = 1 - e \ .$$

Infine, poiché il residuo in $z = 1$ vale e, il valore dell'integrale richiesto è $2\pi i$. Tale risultato lo si può ottenere anche calcolando il residuo all'infinito. In effetti, espandendo

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1 - \frac{1}{z}} \ ,$$

in serie di Laurent intorno all'infinito si vede immediatamente che il coefficiente del termine $1/z$ è 1.

4. Ricordando che $\frac{d}{dx}\log(x \pm i0) = P(1/x) \mp \pi i\delta(x)$ e che $\theta(1 - 2x) = \theta(\frac{1}{2} - x) = 1 - \theta(x - \frac{1}{2})$, la derivata richiesta è

$$(-2\pi i\delta(x) - \delta(x - 1/2), u(x)) - \frac{1}{2}(x(\delta(x-1) + \delta(x+1)), u'(x)) =$$

$$-2\pi i u(0) - u(1/2) - \frac{1}{2}u'(1) + \frac{1}{2}u'(-1) \ .$$

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 19.05.2011

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = y^2 - x^2 + x + \frac{y}{x^2 + y^2} \ , \qquad f(1) = 0 \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Determinare singolarità e residui della funzione
$$f(z) = \frac{e^{z^2-2z}}{(z-1)^5} + \frac{1}{\sin z^2} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_{C_r} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1 - z^2} dz \ ,$$
dove C_r è il cerchio centrato nell'origine e di raggio r, con $1 < r < \infty$, percorso in senso antiorario. Determinare il valore del residuo all'infinito della funzione integranda.

4. **Facoltativo.** Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{x-a}{2} \sin \frac{x+a}{2}}{x^2 - a^2} dx \ ,$$
$a > 0$.

1.

$$\Re f(z) = -\frac{z^2+\bar{z}^2}{2} + \frac{z+\bar{z}}{2} + \frac{z-\bar{z}}{2i|z|^2} = -\frac{z^2+\bar{z}^2}{2} + \frac{z+\bar{z}}{2} + \frac{i}{2z} - \frac{i}{2\bar{z}} \ ,$$

quindi $f(z) = -z^2 + \frac{i}{z} + z + ic$, con $c \in \mathbb{R}$ costante. Essendo $f(1) = 0$, si ha $c = -1$, quindi $f(z) = -z^2 + \frac{i}{z} + z - i$.

2. La funzione ha un polo quinto in 1, poli semplici nei punti $z_{k,\pm} = \pm\sqrt{k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, e un polo doppio in 0. Inoltre, il primo termine ha una singolarità essenziale isolata all'infinito mentre, sempre all'infinito, il secondo termine ha una singolarità essenziale non isolata. Quindi ∞ è singolarità essenziale non isolata per f. I residui di f nei punti $z_{k,\pm}$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, sono

$$R_{k,\pm} = \lim_{z\to z_k} \frac{z-z_k}{\sin z^2} = \frac{1}{2z_k \cos z_k} = \pm\frac{(-)^k}{2\sqrt{k\pi}} \ ,$$

$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Lo sviluppo in serie di Laurent

$$\frac{e^{z^2-2z}}{(z-1)^5} = \frac{e^{(z-1)^2}}{e(z-1)^5} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(z-1)^{2k-5} \ ,$$

mostra che il residuo di f in 1 vale $\frac{1}{2e}$. Lo stesso risultato segue considerando la rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate di e^{z^2-2z}. Nel presente caso il residuo richiesto corrisponde alla derivata quarta di e^{z^2-2z} calcolata in $z = 1$ e divisa per 4!.

3. Si osservi che il contorno d'integrazione racchiude tutte le singolarità al finito della funzione integranda. Possiamo quindi sfruttare il fatto che la somma totale dei residui di una funzione che ha solo singolarità isolate (essenziali o non essenziali) deve esser nulla. Infatti ciò implica che il valore dell'integrale richiesto è pari a $2\pi i$ volte l'opposto del residuo dell'integrando all'infinito. D'altronde lo sviluppo dell'integrando in serie di Laurent intorno al punto all'infinito è

$$\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-z^2} = -\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{z^2(1-\frac{1}{z^2})} = -\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} z^{-2(j+1)-k} \ .$$

L'assenza del termine $1/z$ implica che il valore dell'integrale richiesto è 0. Lo stesso risultato lo si può ottenere considerando la relazione

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=\infty} = -\{\mathrm{Res}\, f(t^{-1})t^{-2}\}_{t=0} \ ,$$

dove $t = 1/z$. Infatti, nel caso $f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-z^2}$, si ha

$$-\{\mathrm{Res}\, f(t^{-1})t^{-2}\}_{t=0} = -\{\mathrm{Res}\, \frac{e^{-t}}{t^2-1}\}_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{te^{-t}}{t^2-1} = 0 \ .$$

Ovviamente lo stesso risultato lo si ottiene considerando la somma dei residui dell'integrando all'interno di C_R. Per completezza illustriamo i passaggi. La funzione integranda ha una singolarità essenziale isolata in

$z = 0$ e un polo semplice in -1 e $+1$. Per il calcolo del residuo in 0 è necessario considerare lo sviluppo in serie di Laurent

$$\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-z^2} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(-)^k}{k!} z^{2j-k} ,$$

da cui segue che il residuo in 0 vale $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sinh(-1)$. A proposito del precedente calcolo, si osservi che, essendo $z = 0$ una singolarità essenziale isolata, non era possibile utilizzare la relazione

$$\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-z_0)^n f(z)\right] , \tag{1}$$

valida solo nel caso f abbia una singolarità polare di ordine n in $z = z_0$ ((1) è banalmente valida anche nel caso in cui f non abbia singolarità in $z = z_0$, in quanto in tal caso si otterrebbe, come deve essere, $\{\mathrm{Res}\, f(z)\}_{z=z_0} = 0$). Infatti, una singolarità essenziale isolata ha uno sviluppo di Laurent con un'infinità di termini con potenze negative, e la relazione precedente ha senso solamente nel caso queste siano in numero finito. Si ricorda ancora una volta che il residuo di una funzione in un punto z_0 è dato dal coefficiente della potenza $(z-z_0)^{-1}$ dello sviluppo in serie di Laurent di $f(z)$ intorno a z_0. È quindi chiaro che la relazione (1) per la determinazione del residuo è utilizzabile solamente nel caso in cui z_0 sia singolarità polare.

I residui in ± 1 sono

$$\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-z}|_{z=-1} = \frac{e}{2} , \qquad -\frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1+z}|_{z=1} = -\frac{1}{2e} .$$

Si ha quindi

$$\int_{C_r} \frac{e^{-\frac{1}{z}}}{1-z^2} dz = 0 ,$$

risultato noto dal calcolo del residuo all'infinito, quindi il confronto tra i due risultati fornisce un modo per mostrare che $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^{2j+1}}{(2j+1)!} = \sinh(-1)$.

4. Utilizzando l'identità di prostaferesi $\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2} = (\cos a - \cos x)/2$, possiamo riscrivere l'integrale nella forma

$$-\frac{1}{4}\int_C \frac{e^{ix}}{x^2-a^2}dx - \frac{1}{4}\int_C \frac{e^{-ix}}{x^2-a^2}dx + \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos a}{x^2-a^2}dx ,$$

dove il contorno d'integrazione C è l'asse reale eccetto per lo scavalcamento, nel semipiano complesso superiore, dei punti $\pm a$. I contorni del primo e del terzo integrale possono esser chiusi alla Jordan nel semipiano complesso superiore. Poiché gli integrandi in questione non hanno singolarità all'interno della curva d'integrazione, segue che il valore sia del primo che del terzo integrale è 0. Il contorno del secondo integrale si può chiudere nel semipiano complesso inferiore. Il valore dell'integrale è quindi dato dalla somma dei due residui in $\pm a$ della funzione $-\frac{1}{4}\frac{e^{-ix}}{x^2-a^2}$ moltiplicata per $-2\pi i$ (il segno meno è dovuto al fatto che il contorno d'integrazione risultante è orientato in senso orario). Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}}{x^2-a^2}dx = \frac{\pi}{2}\frac{\sin a}{a} , \qquad a > 0 .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 21.06.2011

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}} \cos \frac{x-y}{x^2+y^2} \ , \qquad f(2(1-i)/\pi) = 0 \ ,$$

$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcolino gli integrali

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\cos(\pi x)}{4x^2 - 1} dx \ ,$$

$$I_2 = \int_C \frac{\cos(\pi z) + \sin z^2}{z^2} dz \ ,$$

con C il cerchio di raggio 1 centrato nell'origine e percorso in senso antiorario.

3. Facoltativo. Determinare le singolarità e il residuo in $z = 1$ della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2-1}}}{z^2 - 1} \ .$$

4. Determinare i possibili valori delle costanti $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ affinché

$$(e^{\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x}, u(x)) \ , \qquad (e^{\beta_1 x + \beta_2 x^3}, u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

siano distribuzioni temperate regolari. Si determinino inoltre i valori di $\alpha_i \in \mathbb{C}$ per i quali $x^2 e^{\alpha_1 x^2 + \alpha_2 x}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e/o a $\Theta_M(\mathbb{R})$.

5. Si calcolino valore e derivata delle seguenti distribuzioni temperate

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\sum_{k=1}^{2} e^{ix} \frac{d^k}{dx^k} \lim_{y\to+0} (\log(1+x+iy) - \log(1+x-iy)), u(x)\Big) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

$$((x+1)\delta(x^2 - x) + x\frac{d}{dx}\theta(1-4x), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

6. Si mostri che se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora $x^n u(x) \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

7. Facoltativo. Si dica, spiegando il motivo, se i funzionali

$$F_1(u) = \int_{-1}^{1} x e^{-x^2} u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

$$F_2(u) = \int_1^\infty e^{ix^2} u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

sono distribuzioni temperate. In caso affermativo se ne calcoli la derivata.

1. Si ha
$$e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}}\cos\frac{x-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{x^2+y^2}}\left(e^{i\frac{x-y}{x^2+y^2}} + e^{-i\frac{x-y}{x^2+y^2}}\right)$$
$$= \frac{1}{2}e^{\frac{(1+i)x+(1-i)y}{x^2+y^2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{(1-i)x+(1+i)y}{x^2+y^2}} = \frac{1}{2}e^{\frac{(1+i)\bar{z}}{|z|^2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{(1-i)z}{|z|^2}} = \Re e^{\frac{1+i}{z}} ,$$
quindi $f(z) = e^{\frac{1+i}{z}} - i$.

2. L'integrando di I_1 è una funzione pari, per cui il dominio d'integrazione può essere esteso a tutto $\mathbb{R}$ dividendo per due il risultato. Sia C il contorno coincidente con $\mathbb{R}$ eccetto per due semicerchi sul piano complesso superiore centrati in $\pm 1/4$. Si ha
$$I_1 = \frac{1}{4}\int_C \frac{e^{i\pi z}}{4z^2-1}dz + \frac{1}{4}\int_C \frac{e^{-i\pi z}}{4z^2-1}dz \ .$$
Il contorno del primo integrale è chiudibile alla Jordan in $\Im z > 0$, da cui segue che tale integrale è nullo. Il contorno del secondo integrale è chiudibile alla Jordan sul piano complesso inferiore, da cui segue che il valore di I_1 è pari a $-2\pi i$ la somma dei residui in $z = \pm 1/2$ di $\frac{1}{4}\frac{e^{-i\pi z}}{4z^2-1}$
$$I_1 = -\frac{2\pi i}{4}\big(Res_{z=-1/2}\frac{e^{-i\pi z}}{4z^2-1} + Res_{z=1/2}\frac{e^{-i\pi z}}{4z^2-1}\big) = -\frac{\pi}{4} \ .$$
Possibili contributi ad I_2 dipendono dalla singolarità dell'integrando in $z = 0$. D'altronde tale integrando è una funzione pari di z, quindi il suo sviluppo in serie di Laurent intorno a $z = 0$ non può contenere potenze dispari di z. Ne segue che il residuo dell'integrando, e quindi l'integrale stesso, è nullo.

3. f ha singolarità essenziali isolate in ± 1. Sviluppando l'esponenziale si ha
$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\frac{1}{(z-1)^{j+1}(z+1)^{j+1}}$$
Per ottenere il residuo richiesto è necessario sviluppare in serie di Laurent intorno al punto $z = 1$. Tale sviluppo lo si ottiene dalla precedente serie sviluppando $(z+1)^{-j-1}$ in serie di potenze di $z-1$. Per ogni j, il coefficiente del termine $(z-1)^{-1}$ della serie corrisponde quindi al coefficiente del termine $(z-1)^j$ nello sviluppo in serie di Taylor di $(z+1)^{-j-1}$ intorno a $z = 1$. Tale coefficiente è
$$\frac{1}{j!}\frac{d^j}{dz^j}(z+1)^{-j-1}|_{z=1} = (-1)^j\frac{2^{-2j-1}}{j!}\frac{(2j)!}{j!} ,$$
da cui segue che il residuo richiesto è
$$\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{2^{-2j-1}(2j)!}{(j!)^3} \ .$$

4. $e^{\alpha_1 x^2+\alpha_2 x}$ è distribuzione temperata regolare se $\Re\alpha_1 < 0$, $\forall\alpha_2 \in \mathbb{C}$, oppure $\Re\alpha_1 = \Re\alpha_2 = 0$. Nel caso di $e^{\beta_1 x+\beta_2 x^3}$ si deve avere $\Re\beta_1 = \Re\beta_2 = 0$. $x^2 e^{\alpha_1 x^2+\alpha_2 x}$ appartiene sia a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ che a $\Theta_M(\mathbb{R})$ per $\Re\alpha_1 < 0$, $\forall\alpha_2 \in \mathbb{C}$ ed appartiene solamente a $\Theta_M(\mathbb{R})$ nel caso $\Re\alpha_1 = \Re\alpha_2 = 0$.

5. Poiché $\log(1+x\pm 0) = \log|1+x| \pm \pi i\theta(-1-x)$, si ha

$$\frac{1}{2\pi i}e^{ix}\Big(\frac{d}{dx}+\frac{d^2}{dx^2}\Big)2\pi i\theta(-1-x)\ .$$

Quindi

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{2}e^{ix}\frac{d^k}{dx^k}&\lim_{y\to+0}(\log(1+x+iy)-\log(1+x-iy))\\ &=-e^{ix}(\delta(x+1)+\delta'(x+1))\ ,\end{aligned}$$

da cui segue che il valore del funzionale proposto è

$$e^{-i}[(i-1)u(-1)+u'(-1)]\ .$$

Inoltre, la derivata della prima distribuzione è

$$-ie^{ix}(\delta(x+1)+\delta'(x+1))-e^{ix}(\delta'(x+1)+\delta''(x+1))\ .$$

Per quanto riguarda la seconda distribuzione, si ha

$$\begin{aligned}&((x+1)\delta(x^2-x)+x\frac{d}{dx}\theta(1-4x),u(x))\\ &=((x+1)(\delta(x)+\delta(x-1))-x\delta(x-\frac{1}{4}),u(x))\\ &=u(0)+2u(1)-\frac{1}{4}u(\frac{1}{4})\ ,\qquad \forall u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ ,\end{aligned}$$

e la derivata richiesta è

$$\delta(x)+\delta(x-1)+(x+1)(\delta'(x)+\delta'(x-1))-\delta(x-\frac{1}{4})-x\delta'(x-\frac{1}{4})\ .$$

Le derivate richieste si calcolano più rapidamente osservando che

$$\begin{aligned}-e^{ix}(\delta(x+1)+\delta'(x+1))&=-e^{-i}\delta(x+1)+e^{ix}\delta'(x+1)\\ &=-e^{-i}[(1-i)\delta(x+1)+\delta'(x+1)]\ ,\end{aligned}$$

e

$$(x+1)(\delta(x)+\delta(x-1))-x\delta(x-\frac{1}{4})=\delta(x)+2\delta(x-1)-\frac{1}{4}\delta(x-\frac{1}{4})\ ,$$

le cui derivate sono

$$-e^{-i}\delta'(x+1)+ie^{ix}\delta'(x+1)+e^{ix}\delta''(x+1)=-e^{-i}[(1-i)\delta'(x+1)+\delta''(x+1)]\ ,$$

e

$$\delta'(x)+2\delta'(x-1)-\frac{1}{4}\delta'(x-\frac{1}{4})\ ,$$

rispettivamente. L'equivalenza dei due modi di procedere nell'effettuare la derivata di una distribuzione è dovuta al fatto che, come descritto nelle note, se $h\in\Theta_M(\mathbb{R})$ e $f\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, allora, essendo $hf\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, si ha $((hf)',u)=-(hf,u')$, da cui segue $(hf)'=h'f+hf'$. Infatti

$$\begin{aligned}((hf)',u)&=-(hf,u')=-(f,hu')=-(f,(hu)'-h'u)\\ &=(f',hu)+(h'f,u)=(hf'+h'f,u)\ .\end{aligned}$$

6. Poiché $x^n \in \Theta_M(\mathbb{R})$, si ha $x^n u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ e $x^n u(x) \in L^1(\mathbb{R})$ segue dal fatto che $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$. La dimostrazione diretta, cioè senza dare per noto che $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, è la seguente

$$\int_{\mathbb{R}} |x^n u| dx = \int_{\mathbb{R}} |x^n u| \frac{1+x^{2(n+1)}}{1+x^{2(n+1)}} dx$$

$$\leq (||u||_{0,0} + ||u||_{2,0}) \int_{\mathbb{R}} \frac{|x^n|}{1+x^{2(n+1)}} dx < \infty \ .$$

Si noti che la potenza $2(n+1)$ non è in generale la minima possibile. La potenza minima è $n+2$ se n è pari e $n+3$ se n è dispari. Si osservi anche che non si è scelta la potenza $2n$ perché per $n=0$ e per $n=1$ la maggiorazione considerata non sarebbe stata possibile.

7. Si ha

$$F_1(u) = \int_{\mathbb{R}} xe^{-x^2}(\theta(x+1) - \theta(x-1))u(x)dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

$$F_2(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{ix^2}\theta(x-1)u(x)dx \ ,$$

e poiché sia xe^{-x^2} che e^{ix^2} appartengono a $\Theta_M(\mathbb{R})$, segue che $F_1(u)$ e $F_2(u)$ sono distribuzioni temperate. Per quanto riguarda le loro derivate, queste sono

$$F_1'(u) = \big((1-2x^2)e^{-x^2}(\theta(x+1)-\theta(x-1))+xe^{-x^2}(\delta(x+1)-\delta(x-1)), u(x)\big)$$

$$F_2'(u) = \big(2ixe^{ix^2}\theta(x-1) + e^{ix^2}\delta(x-1), u(x)\big) \ .$$

Alcuni studenti confondono la semplice limitatezza dei funzionali con la condizione di esser limitati dalle norme di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Affinché un funzionale lineare sia in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ è necessario mostrarne la continuità. Questa è garantita se il funzionale è maggiorato da una combinazione lineare finita di norme di $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Non è quindi sufficiente mostrare la limitatezza di un funzionale per garantirne l'appartenenza a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 1.07.2011

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = -e^{-2xy}\sin(x^2-y^2) \ , \qquad f(\sqrt{\pi}) = 0 \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcolino gli integrali
$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^2-1} dx \ ,$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\alpha x) + x\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx \ , \qquad a, \alpha > 0 \ .$$

3. Determinare singolarità e residui della funzione
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} + \frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}} \ .$$

4. Si mostri che il funzionale $((x^2-1)\partial_x^2\theta(1-3x) + (x-2)^2\delta(-x), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

5. Si calcoli la derivata del funzionale $(x|x|+(x^2-1)\delta(x^2-4), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Si determini per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$
$$F(u) = \int_{-1}^{1} e^{-x^2} u(x)dx + \int_0^{\infty} xe^{ix^2+\alpha x^2} u(x)dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata. Si calcoli, per tali valori di α, la derivata di $F(u)$.

1.
$$\Re f(z) = -e^{-2xy}\sin(x^2-y^2) = -e^{-2xy}\frac{e^{i(x^2-y^2)}-e^{-i(x^2-y^2)}}{2i}$$
$$\frac{1}{2}\big(ie^{-2xy+i(x^2-y^2)} - ie^{-2xy-i(x^2-y^2)}\big) = \frac{1}{2}\big(ie^{iz^2} - ie^{-iz^2}\big) = \Re(ie^{iz^2}) \ ,$$
quindi
$$f(z) = ie^{iz^2} + i \ .$$

2. $I_1 = 0$ in quanto l'integrando è una funzione dispari. Per quanto riguarda I_2, anche il secondo termine nell'integrando è una funzione dispari, per cui
$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin(\alpha x)}{(x^2+a^2)^2}dx = \frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\frac{x\big(e^{i\alpha x}-e^{-i\alpha x}\big)}{(x-ia)^2(x+ia)^2}dx \ , \qquad a,\alpha>0 \ .$$
Chiudendo alla Jordan sul piano complesso superiore, per il primo termine dell'integrando, ed inferiore per il secondo integrando, si ha (si ricordi che il secondo residuo va calcolato con il segno opposto in quanto il contorno d'integrazione risulta in senso orario)
$$I_2 = \frac{2\pi i}{2i}\frac{d}{dz}\frac{(z-ia)^2 z e^{i\alpha z}}{(z-ia)^2(z+ia)^2}|_{z=ia} + \frac{2\pi i}{2i}\frac{d}{dz}\frac{(z+ia)^2 z e^{i\alpha z}}{(z-ia)^2(z+ia)^2}|_{z=-ia}$$
$$= \pi\Big(\frac{(1+i\alpha z)e^{i\alpha z}}{(z+ia)^2} - \frac{2ze^{i\alpha z}}{(z+ia)^3}\Big)|_{z=ia} + \pi\Big(\frac{(1-i\alpha z)e^{-i\alpha z}}{(z-ia)^2} - \frac{2ze^{-i\alpha z}}{(z-ia)^3}\Big)|_{z=-ia}$$
$$= \frac{\pi\alpha}{2a}e^{-\alpha a}$$

3. Le singolarità di
$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} + \frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}} \ ,$$
sono

$z=0$: singolarità essenziale isolata

$z=\pm 1$: poli del prim'ordine

$z=\frac{1}{k\pi}+2$, $k\in\mathbb{Z}$: poli del prim'ordine. Si noti che $z=\infty$, corrispondente a $k=0$, è un polo del prim'ordine (si veda l'espansione in serie riportata più avanti).

$z=2$: singolarità essenziale non isolata ($z=2$ corrisponde a $k=\infty$, e quindi punto d'accumulazione di poli).

Per quanto riguarda il residuo in $z=0$, si osservi che trattandosi di singolarità essenziale isolata, è necessario determinare lo sviluppo in serie di Laurent di $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ intorno a tale punto
$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{-j}}{j!}\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k} = -\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{1}{j!}z^{2k-j} \ .$$

Il coefficiente del termine z^{-1} corrisponde alla singola sommatoria che si ottiene ponendo $j = 2k+1$. Segue che il residuo richiesto è

$$-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = -\sinh 1 \ .$$

Il residuo di f in $z = 1$ vale $e/2$, mentre in $z = -1$ vale $-1/(2e)$. Per i residui in $2 + 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, si ha, utilizzando la regola dell'Hopital,

$$\mathrm{Res}(f(z))|_{z=2+1/(k\pi)} = \frac{z - (\frac{1}{k\pi} + 2)}{\sin \frac{1}{z-2}}|_{z=\frac{1}{k\pi}+2} = \frac{1}{-\frac{1}{(z-2)^2}\cos\frac{1}{z-2}}|_{z=\frac{1}{k\pi}+2}$$

$$= -\frac{1}{(k\pi)^2\cos(k\pi)} = \frac{(-)^{k+1}}{(k\pi)^2} \ .$$

In merito va sottolineato che alcuni studenti hanno calcolato il residuo della funzione riportando il calcolo esplicito per tutti e due i termini di f. È del tutto ovvio a priori che $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ ha residuo nullo in $2 + 1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, come, d'altronde, è altrettanto ovvio che $\frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}}$ ha residuo nullo in $z = 0$ e $z = \pm 1$, non c'è quindi bisogno di alcun calcolo esplicito per mostrar ciò.

Calcoliamo infine il residuo all'infinito. Per quanto riguarda il termine $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$, tale residuo è nullo. Infatti, sviluppandolo in serie intorno all'infinito, si ha (si ricordi che mentre l'esponenziale converge su tutto $\mathbb{C}$, il termine $\frac{1}{z^2-1}$ non è direttamente espandibile utilizzando la serie geometrica. Questa, avendo raggio di convergenza 1, è utilizzabile dopo aver posto $\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{z^2(1-z^{-2})}$)

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1} = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2(1-z^{-2})} = \frac{1}{z^2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{z^{-j}}{j!}\sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} = \frac{1}{z^2}\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{1}{j!}z^{-2k-j} \ ,$$

che mostra che il coefficiente del termine z^{-1} è nullo, e tale risulta quindi il residuo di $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ all'infinito. Alla stessa conclusione si giunge osservando che il residuo all'infinito di $\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2-1}$ deve esser uguale all'opposto della somma dei suoi residui all'infinito. Infatti, si ha $\frac{1}{2}(e^{-1} - e) - \frac{1}{2}e^{-1} + \frac{1}{2}e = 0$.

Sempre per quanto riguarda il residuo all'infinito, consideriamo lo sviluppo in serie intorno all'infinito del termine $\frac{1}{\sin\frac{1}{z-2}}$. A tal fine è necessario considerare una buona coordinata locale nell'intorno del punto all'infinito $t = \frac{1}{z-2}$. Il residuo all'infinito corrisponde a quello della funzione

$$-\frac{1}{t^2\sin t} = -\frac{1}{t^3\frac{\sin t}{t}} \ ,$$

che ha un polo del terzo ordine in $t = 0$. Il residuo richiesto è quindi

$$-\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{t^3}{t^3}\frac{1}{\frac{\sin t}{t}}\Big) = -\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\Big(-2\frac{\cos t}{\sin^2 t} + 2t\frac{\cos^2 t}{\sin^3 t} + \frac{t}{\sin t}\Big) =$$

$$\lim_{t\to 0}\Big(\frac{-\sin^2 t + 2t\cos t\sin t}{3\sin^2 t\cos t}\Big) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \ .$$

Un modo equivalente e più rapido di calcolare il residuo è sviluppare $\sin t$ a denominatore e poi utilizzare la serie geometrica

$$-\frac{1}{t^3 \frac{\sin t}{t}} = -\frac{1}{t^3} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + \mathcal{O}(t^4)} = -\frac{1}{t^3}(1 + \frac{t^2}{6} + \mathcal{O}(t^4)) \ ,$$

da cui segue che il coefficiente di t^{-1} è $-\frac{1}{6}$.

4. $(x^2-1)\partial_x^2\theta(1-3x)+(x-2)^2\delta(-x)$ è la somma di distribuzioni moltiplicate elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$, per cui è una distribuzione temperata. Prima di calcolare la derivata, si osservi che

$$(x^2-1)\partial_x^2\theta(1-3x) + (x-2)^2\delta(-x) = (1-x^2)\partial_x\delta(x-\frac{1}{3}) + 4\delta(x) \ ,$$

da cui segue che la derivata richiesta è

$$-((1-x^2)\partial_x\delta(x-\frac{1}{3}) + 4\delta(x), u'(x)) = ((1-x^2)u'(x))'|_{x=\frac{1}{3}} - 4u'(0) =$$

$$= \frac{8}{9}u''(\frac{1}{3}) - \frac{2}{3}u'(\frac{1}{3}) - 4u'(0) \ .$$

5. Si ha

$$x|x| + (x^2-1)\delta(x^2-4) = x^2(\theta(x)-\theta(-x)) + \frac{x^2-1}{4}(\delta(x-2)+\delta(x+2))$$

$$= x^2(\theta(x)-\theta(-x)) + \frac{3}{4}(\delta(x-2)+\delta(x+2)) \ ,$$

e la derivata richiesta è

$$(2x(\theta(x)-\theta(-x)) + 2x^2\delta(x) + \frac{3}{4}(\delta'(x-2)+\delta'(x+2)), u(x))$$

$$= (2x(\theta(x)-\theta(-x)), u(x)) - \frac{3}{4}u'(2) - \frac{3}{4}u'(-2) \ .$$

6. La condizione richiesta è $\Re\alpha \leq 0$. Si ha

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-x^2}(\theta(x+1)-\theta(x-1)) + xe^{ix^2+\alpha x^2}\theta(x)]u(x)dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

da cui segue

$$F'(u) = (e^{-x^2}(\delta(x+1)-\delta(x-1)) - 2xe^{-x^2}(\theta(x+1)-\theta(x-1)) + xe^{ix^2+\alpha x^2}\delta(x)$$

$$+[1+2(i+\alpha)x^2]e^{ix^2+\alpha x^2}\theta(x), u(x))$$

$$= (-2xe^{-x^2}(\theta(x+1)-\theta(x-1)) + [1+2(i+\alpha)x^2]e^{ix^2+\alpha x^2}\theta(x), u(x))$$

$$+e^{-1}(u(-1)-u(1)) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 28.07.2011

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = \cosh(2xy)\cos(x^2 - y^2) \ , \qquad f(i\sqrt{\pi}) = -1 + i\pi \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcolino gli integrali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{(x+1)(x^2+1)} dx \ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos^3 x}{x^2 - \pi^2/4} dx \ .$$

3. Si mostri che il funzionale $(|x| + (x-2)^2\delta(1-x), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

4. Si calcoli la derivata del funzionale
$$(x^2\partial_x^2\theta(1-2x) + (x-4)\delta(x^2-4) + \frac{3}{2}\delta(x+2), u(x)) \ ,$$
$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5. Si determini per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$$F(u) = \int_{-2}^{1} e^{-\alpha x^2} u(x) dx + \int_{1}^{\infty} x e^{i\beta x} u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata. Si calcoli, per tali valori di α e β, la derivata di $F(u)$.

1.

$$4\cosh(2xy)\cos(x^2-y^2) = \left(e^{2xy}+e^{-2xy}\right)\left(e^{i(x^2-y^2)}+e^{-i(x^2-y^2)}\right) =$$

$$\left(e^{\frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2)}+e^{-\frac{i}{2}(z^2-\bar{z}^2)}\right)\left(e^{\frac{i}{2}(z^2+\bar{z}^2)}+e^{-\frac{i}{2}(z^2+\bar{z}^2)}\right) =$$

$$\left(e^{iz^2}+e^{-iz^2}+e^{i\bar{z}^2}+e^{-i\bar{z}^2}\right) = 2\cos z^2 + 2\cos\bar{z}^2 = 4\Re(\cos z^2)\ ,$$

da cui $f(z) = \cos z^2 + i\pi$.

2. Tutti e due gli integrali si calcolano applicando prima il lemma di Jordan e poi il teorema dei residui. Per il primo integrale si ha

$$\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\left(e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}\right)}{(x+1)(x^2+1)}dx =$$

$$\pi\frac{xe^{i\pi x}}{(x+1)(x+i)}|_{x=i}+\pi\frac{xe^{-i\pi x}}{(x+1)(x-i)}|_{x=-i}+\pi\frac{xe^{-i\pi x}}{x^2+1}|_{x=-1} = \frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)\ .$$

Nel caso del secondo integrale si ha

$$\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{x^2-\pi^2/4}dx =$$

$$\frac{\pi i}{4}\frac{e^{3ix}+3e^{ix}}{x+\pi/2}|_{x=\pi/2} - \frac{\pi i}{4}\frac{e^{-3ix}+3e^{-ix}}{x-\pi/2}|_{x=-\pi/2} = -1\ .$$

3. I due termini della somma $|x|+(x-2)^2\delta(1-x) = |x|+\delta(1-x)$ sono distribuzioni temperate moltiplicate per termini in $\Theta_M(\mathbb{R})$, quindi si tratta di una distribuzione temperata. La sua derivata è

$$(\operatorname{sgn} x+\delta'(x-1), u(x)) = (\operatorname{sgn} x, u(x)) - u'(1)\ .$$

4. Poiché $\theta(1-2x) = \theta(1/2-x) = 1-\theta(x-1/2)$, si ha

$$x^2\partial_x^2\theta(1-2x)+(x-4)\delta(x^2-4)+\frac{3}{2}\delta(x+2) =$$

$$-x^2\delta'(x-1/2)+\frac{x-4}{4}(\delta(x-2)+\delta(x+2))+\frac{3}{2}\delta(x+2) =$$

$$-x^2\delta'(x-1/2)-\frac{1}{2}\delta(x-2)\ ,$$

da cui segue che la derivata richiesta è

$$(x^2\delta'(x-1/2)+\frac{1}{2}\delta(x-2), u'(x)) = -(x^2u'(x))'|_{x=1/2}+\frac{1}{2}u'(2) =$$

$$-u'(1/2)-\frac{1}{4}u''(1/2)+\frac{1}{2}u'(2)\ .$$

5. Si noti che $e^{-\alpha x^2} \in \Theta_M(\mathbb{R})$ per $\Re\alpha \geq 0$, mentre $e^{i\beta x} \in \Theta_M(\mathbb{R})$ per $\Im\beta = 0$. Comunque, essendo gli intervalli d'integrazione un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, si ha che il funzionale in questione appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ per α un arbitrario valore complesso e per $\Im\beta \geq 0$. Per convincersene, è sufficiente osservare che

$$\int_{-2}^{1} |e^{-\alpha x^2} u(x)| dx \leq e^{4|\Re\alpha|} \int_{-2}^{1} |u(x)| dx \leq e^{4|\Re\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx \ ,$$

che è immediatamente maggiorabile dalle norme di u. Un ragionamento analogo vale per il termine $\int_1^\infty x e^{i\beta x} u(x) dx$.

Per il calcolo della derivata, riscrivendo il funzionale nella forma

$$F(u) = (e^{-\alpha x^2}(\theta(x+2) - \theta(x-1)) + x e^{i\beta x}\theta(x-1), u(x)) \ ,$$

si ha

$$\begin{gathered} F'(u) = (e^{-\alpha x^2}(\delta(x+2) - \delta(x-1)) - 2\alpha x e^{-\alpha x^2}(\theta(x+2) - \theta(x-1)) + \\ x e^{i\beta x}\delta(x-1) + (1 + i\beta x)e^{i\beta x}\theta(x-1), u(x)) = \\ e^{-4\alpha}u(-2) + (e^{i\beta} - e^{-\alpha})u(1) + \\ ((1 + i\beta x)e^{i\beta x}\theta(x-1) - 2\alpha x e^{-\alpha x^2}(\theta(x+2) - \theta(x-1)), u(x)) \ . \end{gathered}$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 02.09.2011

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = \frac{1}{2}e^{x-y}\cos(x+y) + \frac{1}{2}e^{x+y}\cos(x-y) \ , \qquad f(0) = 1+i \ ,$$

   $z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_C \frac{\sin z}{(z+1)^2} dz \ ,$$

   con C il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine e percorso in senso antiorario.

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4(1-\cos x)^2}{x^2} dx \ .$$

4. Si mostri che il funzionale $(|x^3| + (x^2 - x - 1)\delta(x^2 - 1), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

5. Si calcoli la derivata del funzionale

$$(x^2\partial_x\delta(2-x) + (x-4)\theta(2-3x) + (x+2)^2\delta(x+2), u(x)) \ ,$$

   $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.
$$\frac{1}{2}e^{x-y}\cos(x+y)+\frac{1}{2}e^{x+y}\cos(x-y)=$$
$$\frac{1}{4}e^{x-y}\big(e^{i(x+y)}+e^{-i(x+y)}\big)+\frac{1}{4}e^{x+y}\big(e^{i(x-y)}+e^{-i(x-y)}\big)=$$
$$\frac{1}{4}\big(e^{z+iz}+e^{\bar z-i\bar z}+e^{z-iz}+e^{\bar z+i\bar z}\big)=\frac{1}{2}e^{z}\cos z+\frac{1}{2}e^{\bar z}\cos\bar z\ ,$$
da cui segue che $f(z)=e^z\cos z+i$.

2. L'integrale è dato da $2\pi i$ volte il residuo nel punto $z=-1$ dell'integrando. Tale residuo corrisponde al coefficiente del termine $(z+1)^{-1}$ nello sviluppo in serie di Laurent dell'integrando. Poiché i primi due termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione $\sin z$ sono $-\sin 1+(z+1)\cos 1$, l'integrale richiesto vale $2\pi i\cos 1$. Ovviamente lo stesso risultato lo si ottiene applicando la rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata di una funzione calcolata in un suo punto di analicità
$$\int_C\frac{\sin z}{(z+1)^2}dz=2\pi i\frac{d}{dz}\sin z|_{z=-1}=2\pi i\cos 1\ .$$

3. L'integrando è analitico su tutto il cammino d'integrazione. Comunque, in $z=0$ c'è una singolarità apparente. In vista della decomposizione, tramite la formula di Eulero, della funzione $\cos z$, deformiamo, come usuale, il contorno d'integrazione in modo tale che esso passi sopra il punto $x=0$. Riscriviamo l'integrando nella forma
$$\frac{6+e^{2iz}+e^{-2iz}-4e^{iz}-4e^{-iz}}{z^2}\ .$$
L'integrale si calcola applicando il lemma di Jordan e poi il teorema dei residui o, equivalentemente, la rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata prima di una funzione analitica. L'unico contributo proviene dall'integrale di $(e^{-2iz}-4e^{-iz})/z^2$ lungo la curva chiusa data dal cammino deformato unito con il semicerchio nel semipiano inferiore. Si ha quindi
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4(1-\cos x)^2}{x^2}dx=-2\pi i(-2i+4i)=4\pi\ .$$

4. $|x^3|$ è una distribuzione temperata. Il secondo termine è il prodotto di un elemento di $\Theta_M(\mathbb{R})$ per una distribuzione temperata, segue che questo termine, e quindi il funzionale proposto, è una distribuzione temperata. Si ha
$$|x^3|+(x^2-x-1)\delta(x^2-1)=x^2|x|+x\delta(x^2-1)=x^2|x|+\frac{1}{2}\delta(x+1)-\frac{1}{2}\delta(x-1)\ ,$$
e la derivata richiesta è
$$(2x|x|+x^2\mathrm{sgn}\,x+\frac{1}{2}\delta'(x+1)-\frac{1}{2}\delta'(x-1),u(x))=$$
$$(3x|x|,u(x))-\frac{1}{2}u'(-1)+\frac{1}{2}u'(1)\ .$$

5. Si ha
$$x^2 \partial_x \delta(2-x) + (x-4)\theta(2-3x) + (x+2)^2\delta(x+2) =$$
$$x^2\delta'(x-2) + (x-4)(1-\theta(x-2/3)) \ ,$$
da cui segue che la derivata richiesta è
$$(2x\delta'(x-2) + x^2\delta''(x-2) + 1 - \theta(x-2/3) - (x-4)\delta(x-2/3), u(x)) =$$
$$-(2xu(x))'|_{x=2} + (x^2u(x))''|_{x=2} + \frac{10}{3}u(2/3) + (1-\theta(x-2/3), u(x)) =$$
$$4u'(2) + 4u''(2) + \frac{10}{3}u(2/3) + (1-\theta(x-2/3), u(x)) \ .$$

Compito di Fisica II
Chimica e Chimica Industriale
Padova - Dipartimento di Fisica - 12 Settembre 2011

Problema 1

Una sfera solida isolante è carica con densità costante ρ. Si denoti con $\vec{r}$ il vettore dal centro della sfera ad un punto P interno alla sfera.

1. Si determini il valore del campo elettrico in P;
2. si supponga che dalla sfera sia sottratta una cavità sferica di raggio $\vec{r'}$. Sia $\vec{a}$ il vettore che collega il centro della sfera con quello della cavità. Si determini il campo elettrico sul bordo della cavità;
3. si determini il campo elettrico all'interno della cavità.

Problema 2

Due fili rettilinei indefiniti paralleli distanti $d = 1m$ sono percorsi in versi opposti dalle correnti di intensità $i_1 = 1A$ e $i_2 = 2A$ rispettivamente. Tra i due fili, complanarmente ad essi, vi è una spira quadrata, di lato $a = 20cm$, percorsa da una corrente di intensità i_3.

1. Supponendo che il lato della spira più vicino al filo percorso dalla corrente i_1 sia distante da esso $d_1 = 10cm$, si calcoli la forza totale agente sulla spira.
2. Sia $R = 10^{-8}\Omega$ la resistenza della spira. Si determini la carica che circola nella spira durante lo spostamento dalla posizione descritta a quella in cui la spira si trova in posizione simmetrica rispetto ai due fili.
3. Determinare in quale posizione tra i due fili si dovrebbe porre la spira affinché essa si trovi in equilibrio.

Problema 1

Dalla legge di Gauss segue $E4\pi r^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3$, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r}$. Consideriamo prima un punto P sulla superficie sferica della cavità e denotiamo con $\vec{r}$ il raggio dal centro della sfera grande a P. Grazie al principio di sovrapposizione il campo elettrico nel punto P prima della rimozione della sfera è dato dalla somma del termine E' relativo alle cariche nella sfera più piccola e da E'', il campo relativo alle cariche esterne. Quest'ultimo è il valore del campo richiesto.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{a} + \vec{r'}) = \vec{E}'(\vec{r'}) + \vec{E}'' ,$$

dove $\vec{r'}$ denota il raggio dal centro della piccola sfera al bordo (dove si considera il punto P). La legge di Gauss implica

$$\vec{E}'(\vec{r'}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'} , \qquad \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}(\vec{r'} + \vec{a}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{r'} + \vec{E}'' , \qquad \vec{E}'' = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\vec{a} ,$$

che è indipendente sia dal raggio della cavità che della sfera isolante. È immediato dedurre che il campo elettrico all'interno della cavità è lo stesso che nel punto P. Si può infatti immaginare di calcolare prima il campo sulla superficie sferica di una cavità di raggio più piccolo e poi calcolare la variazione del campo elettrico dovuta alla rimozione della calotta sferica tale da ottenere la stessa cavità sferica originaria. Come segue dal principio di sovrapposizione e dalla legge di Gauss tale varizaione sarebbe nulla.

Problema 2

1. Supponiamo che la corrente i_3 percorra la spira in senso orario. Supponiamo inoltre che la corrente i_1 percorra il filo in direzione discorde rispetto al verso di percorrenza che la corrente i_3 ha nel lato parallelo al filo e più vicino ad esso.

   Si osservi che i due lati della spira perpendicolari ai fili sono percorsi dalla corrente in senso opposto ed inoltre sono posti alla stessa distanza dai due fili. Ne segue che la forza totale su ognuno dei due fili ha lo stesso modulo ma versi opposti, quindi la forza totale agente su questi due lati della spira è nulla.

   Sia y l'asse di coordinate centrato sul filo percorso dalla corrente i_1 e perpendicolare ad esso. Si denoti con $\mathbf{j}$ il versore dell'asse y orientato in modo che $y = d$ sia il punto d'intersezione con il secondo filo.

   La forza totale agente sul lato più vicino al filo percorso da i_1 è la somma delle due forze

   $$\mathbf{F}_1 = \mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi d_1}\mathbf{j} , \qquad \mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi(d - d_1)}\mathbf{j} .$$

Per quanto riguarda il lato opposto della spira, quello più vicino al filo percorso dalla corrente i_2, si ha

$$\mathbf{F}_3 = -\mu_0 \frac{i_1 i_3 a}{2\pi(d_1 + a)}\mathbf{j} \ , \qquad \mathbf{F}_4 = -\mu_0 \frac{i_2 i_3 a}{2\pi(d - d_1 - a)}\mathbf{j} \ .$$

La forza totale agente sulla spira è quindi

$$\mathbf{F}(d_1) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{F}_i = \mu_0 \frac{i_3 a}{2\pi} \left(\frac{i_1}{d_1} - \frac{i_1}{d_1 + a} + \frac{i_2}{d - d_1} - \frac{i_2}{d - d_1 - a} \right) =? \ .$$

2. Sia $\Phi(\mathbf{B}_1)$ il flusso del campo magnetico totale attraverso la spira nella sua posizione iniziale e $\Phi(\mathbf{B}_2)$ quello che attraversa la spira quando è equidistante dai due fili. Si ha

$$\Phi(\mathbf{B}_1) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left(-i_1 \ln \frac{d_1 + a}{d_1} + i_2 \ln \frac{d - d_1}{d - d_1 - a} \right) =? \ ,$$

$$\Phi(\mathbf{B}_2) = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \left(-i_1 \ln \frac{d + a}{d - a} + i_2 \ln \frac{d - a}{d + a} \right) = \frac{\mu_0 a}{2\pi}(i_2 + i_1) \ln \frac{d - a}{d + a} =? \ ,$$

e per la legge di Felici

$$Q = \frac{\Phi(\mathbf{B}_1) - \Phi(\mathbf{B}_2)}{R} =? \ .$$

3. La forza esercitata dalla spira in un punto generico ha ovviamente la stessa forma di $\mathbf{F}(d_1)$, dove adesso la distanza d_1 è intesa variabile. La posizione di equilibrio è quindi il valore di y soluzione di $\mathbf{F}(y) = 0$, ovvero

$$y^2(i_1 - i_2) + y[i_1(a - 2d) - i_2 a] + i_1 d(d - a) = 0 \ ,$$

ovvero $y_1 = 0,32m$ e $y_2 = -2,52m$. La posizione d'equilibrio della spira corrispondente a quella situata tra i due fili risulta quindi

$$y_1 = 0,32m \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 16.09.2011

1. Si calcoli l'integrale
$$\int_C \frac{e^{iz^2}}{(z-1)^3} dz \ ,$$
con C il cerchio di raggio 2 centrato nell'origine e percorso in senso antiorario.

2. Si calcolino i seguenti integrali
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{(x-i)(x^2-1)} dx \ ,$$
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3-\cos\theta)^2} \ .$$

3. Si provi che $(|x-1| + |x-1|^2 + x\theta(1-2x) + (x^2-2)\delta(x^2-1), u(x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

4. Determinare i possibili valori delle costanti $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ affinché
$$(e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}, u(x)) \ , \qquad (e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3}, u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
siano distribuzioni temperate regolari. Si determinino inoltre i valori di $\alpha_i \in \mathbb{C}$ per i quali $x^2 e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e/o a $\Theta_M(\mathbb{R})$.

1. Applicando la rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata seconda di una funzione calcolata in un suo punto di analicità, si ha

$$\int_C \frac{e^{iz^2}}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^{iz^2}|_{z=1} = -\pi e^i(2+4i) \ .$$

2. L'integrando è analitico su tutto il cammino d'integrazione, con i punti $z=\pm 1$ singolarità apparenti. In vista della decomposizione, tramite la formula di Eulero, della funzione $\sin(\pi z)$, deformiamo, come usuale, il contorno d'integrazione in modo tale che esso passi sopra i punti $x=\pm 1$. Riscriviamo l'integrando nella forma

$$\frac{e^{i\pi z}-e^{-iz}}{2i(z-i)(z^2-1)} \ .$$

L'integrale si calcola applicando il lemma di Jordan e poi il teorema dei residui. L'integrale del termine $\frac{e^{i\pi z}}{2i(z-i)(z^2-1)}$ lungo la curva chiusa data dal cammino deformato unito con il semicerchio nel semipiano superiore vale

$$\frac{2\pi i}{2i}\frac{e^{i\pi z}}{z^2-1}|_{z=i} = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi} \ .$$

Il contributo dovuto all'integrale di $-\frac{e^{-i\pi z}}{2i(z-i)(z^2-1)}$ lungo la curva chiusa data dal cammino deformato unito con il semicerchio nel semipiano inferiore, percorso in senso orario (di cui si deve tener conto ricordando il corrispondente segno meno), è

$$\frac{2\pi i}{2i}\Big[\frac{e^{-i\pi z}}{(z-i)(z-1)}|_{z=-1} + \frac{e^{-i\pi z}}{(z-i)(z+1)}|_{z=1}\Big] = -\frac{\pi}{2} \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{(x-i)(x^2-1)}dx = -\frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi}) \ .$$

Nel caso del secondo integrale, si noti che ponendo $z=e^{i\theta}$ si ha $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e l'integrale richiesto è equivalente a $\oint_C f(z)dz$, con C il cerchio di raggio unitario centrato in 0 percorso in senso antiorario e

$$f(z) = \frac{1}{iz(3-\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^2} = \frac{4z}{i(z^2-6z+1)^2} = \frac{4z}{i(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \ ,$$

dove $z_1 = 3-2\sqrt{2}$, $z_2 = 3+2\sqrt{2}$. L'unica singolarità all'interno di C si ha per $z=z_1$. Utilizzando la rappresentazione integrale di Cauchy

$$\frac{d^n g(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z')}{(z'-z)^{n+1}}dz' \ , \qquad n\in\mathbb{N} \ ,$$

con γ una qualsiasi curva chiusa che contenenga z in modo tale che la sua orientazione rispetto a z sia antioraria[1] e al cui interno e su di essa non vi

[1] Se si considera la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$, risulta chiaro che qualsiasi chiusa curva γ racchiude tutti i punti di $\hat{\mathbb{C}}\backslash\gamma$. Comunque, come usuale, un punto si intende interno a γ se tale curva è orientata in senso antiorario rispetto ad esso.

siano singolarità di $g(z)$, si ha

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \frac{dh(z)}{dz}\Big|_{z=z_1} \ ,$$

con $h(z) = \frac{4z}{i(z-z_2)^2}$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3-\cos\theta)^2} = 8\pi \frac{z_1+z_2}{(z_2-z_1)^3} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\pi \ .$$

3. Sia $x\theta(1-2x)$ che $(x^2-2)\delta(x^2-1)$ sono prodotti di elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$ per elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, per cui sono distribuzioni temperate. Il funzionale in questione è quindi una distribuzione temperata. Si noti che spesso il calcolo si semplifica utilizzando la relazione $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$. Per esempio $(x^2-2)\delta(x^2-1) = -\delta(x^2-1) = -(\delta(x-1)+\delta(x-1))/2$. Utilizzando

   - la funzione segno $\epsilon(x) := \theta(x) - \theta(-x)$
   - $|x-1|^2 = (x-1)^2$
   - $\theta(\alpha x) = \theta(x)$ per $\alpha > 0$ e $\theta(-x) = 1-\theta(x)$

   si ha
   $$|x-1| + |x-1|^2 + x\theta(1-2x) + (x^2-2)\delta(x^2-1) =$$
   $$(x-1)\epsilon(x-1) + (x-1)^2 + x(1-\theta(x-1/2)) - \frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x+1)) \ .$$

   Il calcolo della derivata richiesta è quindi immediato: osservando che $\epsilon'(x-1) = 2\delta(x-1)$, si ha

   $$(\epsilon(x-1)+2x-1-\theta(x-1/2)-\frac{1}{2}\delta(x-1/2)-\frac{1}{2}(\delta'(x-1)+\delta'(x+1)), u(x)) =$$

   $$(\epsilon(x-1)+2x-1-\theta(x-1/2), u(x)) - \frac{1}{2}u(1/2) + \frac{1}{2}(u'(1)+u'(-1)) \ .$$

4. $e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ è distribuzione temperata regolare se $\Re\alpha_1 > 0$, $\forall \Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall \alpha_2 \in \mathbb{C}$, oppure se $\Re\alpha_1 = \Im\alpha_2 = 0$, $\forall\Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Nel caso di $e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3}$ si deve avere $\Re\beta_1 = \Im\beta_2 = 0$, $\forall\Im\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\beta_2 \in \mathbb{R}$. $x^2 e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ appartiene sia a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ che a $\Theta_M(\mathbb{R})$ per $\Re\alpha_1 > 0$, $\forall\alpha_2 \in \mathbb{C}$ ed appartiene solamente a $\Theta_M(\mathbb{R})$ nel caso $\Re\alpha_1 = \Im\alpha_2 = 0$, $\forall\Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 23.04.2012

1. Si determini la funzione analitica $f(z)$ sapendo che

$$\Re f(z) = \frac{e^{\frac{y}{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\left(x\cos\frac{x}{x^2+y^2} + y\sin\frac{x}{x^2+y^2}\right)\ , \qquad f(1/\pi) = -\pi\ ,$$

$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x/2) + \sin x}{x^2 - \pi^2} dx\ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$I(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{1}{az}} + e^{-\frac{1}{z^2}}}{1 - z^2} dz\ , \qquad a \in \mathbb{C}\ .$$

4. Facoltativo. Si dimostri l'identità

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_n|=\frac{1}{2}} \cdots \frac{1}{2\pi i}\int_{|z_1|=\frac{1}{2}} \frac{I(az_n \cdots z_1)}{\prod_{k=1}^{n}(1 - z_k^2)} dz_1 \cdots dz_n = I(a)\ , \qquad \forall n \in \mathbb{N}_+\ .$$

1.

$$\Re f(z) = \frac{e^{\frac{i}{2}\frac{\bar z - z}{|z|^2}}}{|z|^2}\Big[\frac{z+\bar z}{4}\Big(e^{\frac{i}{2}\frac{z+\bar z}{|z|^2}} + e^{-\frac{i}{2}\frac{z+\bar z}{|z|^2}}\Big) - \frac{z-\bar z}{4}\Big(e^{\frac{i}{2}\frac{z+\bar z}{|z|^2}} - e^{-\frac{i}{2}\frac{z+\bar z}{|z|^2}}\Big)\Big] \ ,$$

$$= \frac{z+\bar z}{4|z|^2}\Big(e^{\frac{i}{z}} + e^{-\frac{i}{\bar z}}\Big) - \frac{z-\bar z}{4|z|^2}\Big(e^{\frac{i}{z}} - e^{-\frac{i}{\bar z}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{\frac{i}{z}}}{z} + \frac{e^{-\frac{i}{\bar z}}}{\bar z}\Big) = \Re\Big(\frac{e^{\frac{i}{z}}}{z}\Big) \ ,$$

ed essendo $\pi e^{i\pi} = -\pi$, si ha $f(z) = \frac{e^{\frac{i}{z}}}{z}$.

2. Il secondo termine dell'integrando è funzione dispari, per cui l'integrale è equivalente a

$$I = \frac{1}{2}\int_C \frac{e^{\frac{i}{2}z}}{z^2-\pi^2}dz + \frac{1}{2}\int_C \frac{e^{-\frac{i}{2}z}}{z^2-\pi^2}dz \ ,$$

dove, come usuale, C coincide con l'asse reale, eccetto per le due semicirconferenze centrate in $\pm\pi$ e passanti per $\Im z > 0$. Il contorno del primo integrale è chiudibile alla Jordan in $\Im z > 0$, da cui segue che tale integrale è nullo. Il contorno del secondo integrale è chiudibile alla Jordan sul piano complesso inferiore, da cui segue che I è $-2\pi i$ la somma dei residui in $z = \pm\pi$ di $\frac{1}{2}\frac{e^{-iz}}{z^2-\pi^2}$

$$I = -\frac{2\pi i}{2}\big(Res_{z=-\pi}\frac{e^{-\frac{i}{2}z}}{z^2-\pi^2} + Res_{z=\pi}\frac{e^{-\frac{i}{2}z}}{z^2-\pi^2}\big) = -1 \ .$$

3. Il calcolo dell'integrale richiede la determinazione del residuo in $z = 0$. Si osservi che il secondo termine nell'integrando è funzione pari, per cui ha residuo nullo in $z = 0$. Rimane da calcolare, sempre in $z = 0$, il residuo di

$$\frac{e^{-\frac{1}{az}}}{1-z^2} \ .$$

Poiché $z = 0$ è singolarità essenziale (isolata), non è possibile utilizzare la formula che riduce il calcolo del residuo a quello di una derivata di ordine opportuno. D'altronde lo sviluppo in serie di Laurent è immediato

$$\frac{e^{-\frac{1}{az}}}{1-z^2} = \sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(-a)^{-k}}{k!}z^{2j-k} \ ,$$

da cui

$$I(a) = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{a^{-2j-1}}{(2j+1)!} = -\sinh(1/a) \ .$$

Il calcolo di $I(a)$ è anche equivalente ad un calcolo di residui in ± 1 e ∞ (il residuo all'infinito è nullo: si veda il problema 3 del 19.05.2011).

4. Facoltativo. Si osservi che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_1|=\frac{1}{2}}\frac{I(az_1)}{1-z_1^2}dz_1 = \frac{1}{2}(I(a) - I(-a)) = I(a) \ .$$

L'identità segue dall'invarianza di questa relazione sotto la sostituzione $a \to az_2$ e la simultanea applicazione dell'operatore d'integrazione

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z_2|=\frac{1}{2}}\frac{dz_2}{1-z_2^2} \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 12.06.2012

1. Si descrivano le singolarità della funzione

$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} + \frac{1}{\sin z} + e^{\frac{1}{\cos\frac{1}{z^2}}} \ .$$

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2+2z} + z + 1}{(z+1)^2} dz \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \ .$$

4. Si mostri che

$$\left(\frac{1}{x-i0} + x\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-3x) - \frac{d}{dx}\delta(x^3-3x^2+2x), u(-x)\right) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

5. Si determini per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$F(u) = \int_0^1 e^{-\alpha x^2} u(-x) dx + \int_1^\infty e^{i\beta x} \sin(x) u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

   è una distribuzione temperata. Si calcoli, per tali valori di α e β, la derivata di F nel senso delle distribuzioni.

1. Il termine $e^{\frac{1}{z-1}}$ ha una singolarità essenziale isolata in $z = 1$. Il termine $\frac{1}{\sin z}$ ha poli semplici nei punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il punto all'infinito è una singolarità essenziale non isolata in quanto punto d'accumulazione dei poli z_k. Il fatto che ∞ sia punto d'accumulazione segue osservando che nella coordinata $w = 1/z$, i poli sono $w_k = 1/(k\pi)$, da cui risulta che $w = 0$, cioè $z = \infty$, è punto d'accumulazione di poli. Il termine $e^{\frac{1}{\cos\frac{1}{z^2}}}$ ha singolarità essenziali isolate negli zeri di $\cos\frac{1}{z^2}$, cioè nei punti $z_{k,\pm} = \pm\sqrt{\frac{2}{(2k+1)\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$. Il punto $z = 0$, essendo punto d'accumulazione di singolarità essenziali isolate, è una singolarità essenziale non isolata.

2. Dalla rappresentazione integrale di Cauchy per le derivate di una funzione analitica in un dominio, si ha

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^2+2z} + z + 1}{(z+1)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz}\left(e^{z^2+2z} + z + 1\right)|_{z=-1} = 2\pi i \ .$$

3. Grazie al teorema di Cauchy possiamo modificare il contorno d'integrazione. Lo scegliamo coincidente con $\mathbb{R}$, eccetto per la semicironferenza passante sul piano complesso superiore. Esprimendo $\sin^2 z$ in termini di funzioni esponenziali, segue che l'unico integrale che contribuisce è

$$\int_\Gamma \frac{2 - e^{2iz}}{4z^2} dz = \frac{\pi i}{2}\frac{d}{dz} e^{-2iz}|_{z=0} = \pi \ .$$

dove Γ, la cui orientazione è oraria, è il contorno descritto precedentemente, unito alla semicirconferenza di raggio infinito, con base $\mathbb{R}$ e contenuta nel piano complesso inferiore.

4. Si osservi che poiché

$$(\frac{1}{x-i0} + x\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-3x) - \frac{d}{dx}\delta(x^3 - 3x^2 + 2x), u(-x))$$
$$= (-\frac{1}{x+i0} - x\frac{d^2}{dx^2}\theta(x+\frac{1}{3}) + \frac{d}{dx}\delta(-x^3 - 3x^2 - 2x), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

la distribuzione temperata in questione è

$$-\frac{1}{x+i0} - x\frac{d^2}{dx^2}\theta(x+\frac{1}{3}) + \frac{d}{dx}\delta(-x^3 - 3x^2 - 2x) \ .$$

Per dimostrare che si tratta effettivamente di distribuzione temperata si noti che tale è il primo addendo. Il secondo è una distribuzione temperata moltiplicata per un moltiplicatore, per cui è una distribuzione temperata essa stessa. L'argomento della δ è un polinomio con zeri semplici, si ha quindi

$$\frac{d}{dx}\delta(-x^3 - 3x^2 - 2x) = \frac{1}{2}\delta'(x) + \delta'(x+1) + \frac{1}{2}\delta'(x+2) \ ,$$

che è una distribuzione temperata. Il funzionale proposto è quindi definito dalla distribuzione temperata

$$-\frac{1}{x+i0} - x\delta'(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta'(x) + \delta'(x+1) + \frac{1}{2}\delta'(x+2) \ . \tag{1}$$

Per il calcolo della sua derivata, si osservi che la variabile indipendente è x, non $-x$ come si potrebbe erroneamente considerare. Ce se ne può anche convincere ricordando che per un diffeomorfismo $y = h(x)$, si ha

$$(f(x), |J(h)|u(h(x))) = (f(h^{-1}(y)), u(y)) \ .$$

Nel caso in esame $y = h(x) = -x$, per cui

$$(f(x), u(-x)) = (f(-y), u(y)) \ .$$

È quindi chiaro che considerare la derivata della distribuzione temperata definita da $(f(x), u(-x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, vuol dire derivare la distribuzione temperata $f \circ h^{-1}$. In questo contesto si osservi che essendo x e y variabili "mute", cioè d'integrazione, possiamo riscrivere $(f(-y)), u(y))$ come $(f(-x)), u(x))$. Segue quindi, come detto, che la derivazione va fatta rispetto ad x. Derivando (1) rispetto a x, si ha

$$\frac{1}{(x+i0)^2} - \delta'(x+\frac{1}{3}) - x\delta''(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta''(x) + \delta''(x+1) + \frac{1}{2}\delta''(x+2) \ .$$

Essendo

$$\frac{1}{(x \pm i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\log(x \pm i0) = P\left(\frac{1}{x^n}\right) \pm \frac{(-1)^n}{(n-1)!} i\pi\delta^{(n-1)}(x) \ ,$$

segue che la precedente distribuzione temperata è equivalente a

$$(P\left(\frac{1}{x^2}\right) + i\pi\delta'(x) - \delta'(x+\frac{1}{3}) - x\delta''(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta''(x) + \delta''(x+1) + \frac{1}{2}\delta''(x+2), u(x))$$

$$= (P\left(\frac{1}{x^2}\right), u(x)) - i\pi u'(0) - u'(-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}u''(-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}u''(0) + u''(-1) + \frac{1}{2}u''(-2) \ .$$

5. Il funzionale proposto è equivalente a

$$F(u) = \int_{-1}^{0} e^{-\alpha x^2} u(x)dx + \int_{1}^{\infty} e^{i\beta x}\sin(x)u(x)dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

Gli intervalli d'integrazione sono un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. In particolare, gli integrali sono finiti, e quindi il funzionale in questione appartiene a $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e per $\Im\beta \geq 0$. Per convincersene, è sufficiente osservare che

$$\int_{-1}^{0} |e^{-\alpha x^2} u(x)|dx \leq e^{4|\Re\alpha|}\int_{-1}^{0} |u(x)|dx \leq e^{4|\Re\alpha|}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|dx \ ,$$

che è immediatamente maggiorabile dalle norme di u. Un ragionamento analogo vale per il termine $\int_1^\infty e^{i\beta x}\sin(x)u(x)dx$.

Per il calcolo della derivata, riscrivendo il funzionale nella forma

$$F(u) = (e^{-\alpha x^2}(\theta(x+1) - \theta(x)) + e^{i\beta x}\sin(x)\theta(x-1), u(x)) \ ,$$

si ha

$$F'(u) = (e^{-\alpha x^2}(\delta(x+1) - \delta(x)) - 2\alpha x e^{-\alpha x^2}(\theta(x+1) - \theta(x)) +$$
$$e^{i\beta x}\sin(x)\delta(x-1) + (\cos x + i\beta\sin x)e^{i\beta x}\theta(x-1), u(x)) =$$
$$e^{-\alpha}u(-1) - u(0) + e^{i\beta}\sin 1 u(1) +$$
$$((\cos x + i\beta\sin x)e^{i\beta x}\theta(x-1) - 2\alpha x e^{-\alpha x^2}(\theta(x+1) - \theta(x), u(x)) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 26.06.2012

1. Si determini, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$, sapendo che
$$\Re f(z) = \frac{2x}{x^2+y^2} - y + x \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcoli, al variare di $m, n \in \mathbb{N}$, l'integrale
$$\int_0^{2\pi} e^{-im\theta} (\cos\theta)^n d\theta \ .$$

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x^2 \sin x + \sin^2(\sin^2 x)}{x^3} dx \ .$$

4. Si indichi per quali valori della costante $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\left(\frac{1}{x - i0} + \pi i x \frac{d^2}{dx^2}\theta(-x) + \frac{d}{dx}\delta(4x^2 - \alpha^2), u(-2x)\right) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli, per tali α, la derivata.

5. Si dica, motivando, se vi sono valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui il funzionale
$$F(u) = \int_1^{\infty} 2xe^{-\alpha x^2} u(x^2) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
definisce una distribuzione temperata. In caso affermativo si calcoli, per i valori di α identificati, la derivata di tale distribuzione.

1. Si ha
$$\frac{2x}{x^2+y^2}-y+x=\frac{z+\bar z}{|z|^2}+\frac{i}{2}(z-\bar z)+\frac{1}{2}(z+\bar z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar z}+\frac{1}{2}(iz+\overline{iz}+z+\bar z)$$
$$=\Re\Big(\frac{2}{z}+(1+i)z\Big)\ ,$$
per cui $f(z)=2z^{-1}+(1+i)z+ic$, $c\in\mathbb{R}$.

2. Ponendo $z=e^{i\theta}$, l'integrale richiesto è equivalente a
$$-i2^{-n}\oint_{|z|=1}z^{-m-1}(z+z^{-1})^n dz=-i2^{-n}\oint_{|z|=1}\sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}z^{n-m-1-2k}\ .$$
Il termine con la potenza z^{-1} nel precedente sviluppo binomiale è quello con $k=(n-m)/2$. Segue che l'integrale è non nullo solo se $n\geq m$ con $n-m$ pari, nel qual caso
$$\int_0^{2\pi}e^{-im\theta}(\cos\theta)^n d\theta=\ 2^{1-n}\pi\tbinom{n}{(n-m)/2}\ .$$

3. Il secondo termine nell'integrando è dispari e quindi non contribuisce. L'integrale è equivalente a
$$I=\int_{\mathbb{R}}\frac{\sin x}{x}dx\ ,$$
che si calcola immediatamente modificando opportunamente il cammino d'integrazione e quindi applicando il lemma di Jordan. Si ha $I=\pi$.

4. Ponendo $x=-y/2$, utilizzando la relazione $\theta(y/2)=\theta(y)$ e rinominando y con la variabile x, si ha che il funzionale proposto è equivalente a (ricordandosi il fattore $1/2$ della Jacobiana)
$$-(\frac{1}{x+i0}+\pi ix\frac{d^2}{dx^2}\theta(x)+\frac{d}{dx}\delta(x^2-\alpha^2),u(x))\ ,\qquad u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ .$$
D'altronde $\delta(x^2-\alpha^2)$ è ben definita solo nel caso in cui non ci sia alcun valore di $x\in\mathbb{R}$ corrispondente a uno zero doppio di $x^2-\alpha^2$. Quindi il funzionale è una distribuzione temperata per $\alpha\in\mathbb{R}^*$, la cui derivata è
$$(\frac{1}{(x+i0)^2}-\pi i\delta'(x)-\pi ix\delta''(x)-\frac{1}{2|\alpha|}(\delta''(x-\alpha)+\delta''(x+\alpha)),u(x))$$
$$=(P\Big(\frac{1}{x^2}\Big),u(x))-2\pi iu'(0)-\frac{1}{2|\alpha|}(u''(\alpha)+u''(-\alpha))\ .$$

5. $x\mapsto y=x^2$ è un diffeomorfismo dell'intervallo d'integrazione, quindi
$$\int_1^\infty 2xe^{-\alpha x^2}u(x^2)dx=\int_1^\infty e^{-\alpha y}u(y)dy=(e^{-\alpha x}\theta(x-1),u(x))\ ,\ u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})\ ,$$
da cui $F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ se $\Re\alpha\geq 0$, $\forall\Im\alpha\in\mathbb{R}$. La derivata richiesta è
$$(-\alpha e^{-\alpha x}\theta(x-1)+e^{-\alpha x}\delta(x-1),u(x))=(-\alpha e^{-\alpha x}\theta(x-1),u(x))+e^{-\alpha}u(1)\ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 24.07.2012

1. Si determini, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$, sapendo che
$$\Re f(z) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2} - y \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Determinare singolarità e residui della funzione
$$f(z) = \frac{e^{z^3}}{1 - z^2} \ .$$

3. Calcolare
$$\oint_{|z|=1} \frac{(z + z^{-1})^4}{z^2} dz \ .$$

4. Calcolare
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x+1}{x^3+1} dx \ .$$

5. Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui
$$\left(\frac{1}{x - i0} + i\pi \frac{d}{dx}\theta(-x) + \frac{d}{dx}\delta((x-a)(x-b)), u(1-x)\right) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e calcolarne la derivata in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

6. Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{C}$ per cui il funzionale
$$F(u) = \int_1^{\infty} e^{-\alpha x^2} u(1-x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e calcolarne la derivata in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

1. $f(z)=(z+i)^{-1}+iz+ic$, $c\in\mathbb{R}$, infatti

$$\frac{x}{x^2+(y+1)^2}-y=\frac{1}{2}\frac{z+i+\bar z-i}{|z+i|^2}+\frac{i}{2}(z-\bar z)=\Re\Big(\frac{1}{z+i}+iz\Big)\ .$$

2. ∞: singolarità essenziale isolata, ±1: poli semplici. Residui $\lim_{z\to-1}\frac{e^{z^3}}{1-z}=\frac{e^{-1}}{2}$ e $\lim_{z\to1}-\frac{e^{z^3}}{1+z}=-\frac{e}{2}$. Il residuo all'infinito è l'opposto della somma dei residui al finito, cioè $\sinh 1$. Questo deve coincidere con l'opposto del coefficiente del termine $1/z$ nello sviluppo di Laurent intorno all'infinito

$$f(z)=-\frac{1}{z^2}\frac{e^{z^3}}{1-\frac{1}{z^2}}=-\frac{1}{z^2}\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{z^{3j-2k}}{j!}\ .$$

Il termine $1/z$ lo si ha per $k=(3j-1)/2$, quindi per ogni, e solo per, j dispari (essendo k intero, $3j-1$ deve essere pari). Il coefficiente del termine $1/z$ è quindi $-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{(2j+1)!}=-\sinh 1$.

3. L'integrale è nullo poiché l'integrando è somma di potenze pari di z.

4. L'integrando corrisponde a $(x^2-x+1)^{-1}$. Chiudendo il cammino alla Jordan nel piano complesso superiore, l'integrale è dato da $2\pi i$ volte il residuo dell'integrando nel punto $e^{\frac{\pi i}{3}}$, cioè $\frac{2\pi i}{(z^2-z-1)'}\big|_{z=e^{\frac{\pi i}{3}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

5. Se $a\neq b\in\mathbb{R}$ allora $\delta((x-a)(x-b))=\frac{1}{|a-b|}(\delta(x-a)+\delta(x-b))$. L'espressione è in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ eccetto per $a=b$. Ponendo $y=1-x$ segue che la distribuzione temperata è equivalente a (rinominando y con x)

$$(\frac{1}{1-x-i0}-i\pi\frac{d}{dx}\theta(x-1)-\frac{1}{|a-b|}\big(\delta'(x+a-1)+\delta'(x+b-1)\big),u(x))\ ,$$

la cui derivata, usando $\frac{1}{1-x-i0}=P\big(\frac{1}{1-x}\big)+i\pi\delta(1-x)$, è

$$(P\bigg(\frac{1}{(1-x)^2}\bigg),u(x))-\frac{1}{|a-b|}(u''(1-a)+u''(1-b))\ .$$

6. $F(u)\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, $\forall\Im\alpha\in\mathbb{R}$ con $\Re\alpha\geq0$. Ponendo $y=1-x$ si ha

$$\int_1^{\infty}e^{-\alpha x^2}u(1-x)dx=-\int_0^{-\infty}e^{-\alpha(1-y)^2}u(y)dy=(e^{-\alpha(x-1)^2}\theta(-x),u(x))\ ,$$

la cui derivata è $-2\alpha((x-1)e^{-\alpha(x-1)^2}\theta(-x),u(x))-e^{-\alpha}u(0)$.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 11.09.2012

1. Determinare, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$, sapendo che
$$\Re f(z) = e^{-y}\cos x + e^{\frac{y}{x^2+y^2}}\cos\frac{x}{x^2+y^2} \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Calcolare l'integrale
$$\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta \ ,$$
con $f(\theta)$ la funzione

   A. $e^{-2i\theta}\cos\theta$,

   B. $e^{-2i\theta}\cos^2\theta$,

   C. $e^{-4i\theta}\cos^3\theta$.

3. Calcolare l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(x-2)\sin(\pi x)}{x^4-1}dx \ .$$

4. Siano a e b costanti reali non nulle. Si indichi per quali valori della costante $\alpha \in \mathbb{R}$
$$(\frac{d}{dx}\theta(ax) + \frac{d}{dx}\delta(x^2-\alpha^2), u(bx)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli, per tali α, la derivata.

5. Si dica, motivando, se vi sono valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ per cui il funzionale
$$F(u) = \int_1^{\infty} 2xe^{-\alpha x^2+\beta x^4}u(x^2)dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
definisce una distribuzione temperata. In caso affermativo si calcoli, per i valori di α e β identificati, la derivata di tale distribuzione.

1. Si ha
$$\Re f(z) = \frac{1}{2}\Big(e^{-y+ix} + e^{-y-ix} + e^{\frac{ix+y}{x^2+y^2}} + e^{-\frac{ix+y}{x^2+y^2}}\Big)$$
$$= \frac{1}{2}\Big(e^{iz} + e^{-i\bar{z}} + e^{\frac{i\bar{z}}{|z|^2}} + e^{-\frac{iz}{|z|^2}}\Big) = \Re\Big(e^{iz} + e^{\frac{i}{z}}\Big) ,$$
per cui $f(z) = e^{iz} + e^{\frac{i}{z}} + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Si tratta di casi particolari dell'integrale
$$\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}(\cos\theta)^n d\theta \ , \tag{1}$$
considerato in una precedente prova scritta. Risulta, A: 0, B:$\pi/2$, C: 0. Di seguito riportiamo la soluzione generale.

Ponendo $z = e^{i\theta}$, l'integrale (1) è equivalente a
$$-i2^{-n} \oint_{|z|=1} z^{-m-1}(z + z^{-1})^n dz = -i2^{-n} \oint_{|z|=1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-m-1-2k} \ .$$
Il termine con la potenza z^{-1} nel precedente sviluppo binomiale è quello con $k = (n-m)/2$. Segue che l'integrale è non nullo solo se $n \geq m$ con $n - m$ pari, nel qual caso
$$\int_0^{2\pi} e^{-im\theta}(\cos\theta)^n d\theta = \ 2^{1-n}\pi \binom{n}{(n-m)/2} \ .$$

3. Poiché l'integrale di funzione dispari su intervallo pari è nullo, segue che l'integrale è equivalente a
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \sin(\pi x)}{x^4 - 1} dx \ .$$
Come usuale per integrali di questo tipo, deformiamo il cammino in modo tale che ognuno dei due punti di singolarità apparente, -1 e 1, siano scavalcati con una piccola semicirconferenza sul piano complesso superiore. Ponendo quindi $\sin(\pi z) = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})/2i$ e chiudendo alla Jordan nel piano integrale superiore per il termine contenente $e^{i\pi z}$ e inferiore per il termine contenente $e^{-i\pi z}$, l'integrale si riduce al seguente calcolo di residui
$$\frac{2\pi i}{2i}\Big(\mathrm{Res}|_{z=i}\frac{ze^{i\pi z}}{z^4-1} + \mathrm{Res}|_{z=-i}\frac{ze^{-i\pi z}}{z^4-1} + \mathrm{Res}|_{z=-1}\frac{ze^{-i\pi z}}{z^4-1} + \mathrm{Res}|_{z=1}\frac{ze^{-i\pi z}}{z^4-1}\Big)$$
$$= \frac{\pi}{4}\Big(\frac{e^{i\pi z}}{z^2}|_{z=i} + \frac{e^{-i\pi z}}{z^2}|_{z=-i} + \frac{e^{-i\pi z}}{z^2}|_{z=-1} + \frac{e^{-i\pi z}}{z^2}|_{z=1}\Big)$$
$$= \frac{\pi}{4}\big(-e^{-\pi} - e^{-\pi} + e^{-i\pi} + e^{i\pi}\big) = -\frac{\pi}{2}\big(e^{-\pi} + 1\big) \ .$$

4. Il funzionale è ben definito per $\alpha \neq 0$. Ponendo $x = y/b$, nominando y nuovamente con la variabile x, ed osservando che
$$\theta\Big(\frac{a}{b}x\Big) = \theta\Big(\frac{a}{b}\Big)\theta(x) + \theta\Big(-\frac{a}{b}\Big)\theta(-x) \ ,$$

si ha che il funzionale proposto è equivalente a (ricordandosi il fattore $1/|b|$ della Jacobiana)

$$\mathrm{sgn}(b)\Big(\Big(\theta\Big(\frac{a}{b}\Big)-\theta\Big(-\frac{a}{b}\Big)\Big)\delta(x)+\frac{|b|}{2|\alpha|}(\delta'(x-\alpha b)+\delta'(x+\alpha b)),u(x)\Big) ,$$

$u\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'altronde

$$\mathrm{sgn}(b)\Big(\Big(\theta\Big(\frac{a}{b}\Big)-\theta\Big(-\frac{a}{b}\Big)\Big)=\mathrm{sgn}(b)\mathrm{sgn}\Big(\frac{a}{b}\Big)=\mathrm{sgn}(a) ,$$

e

$$|b|\mathrm{sgn}(b)=b ,$$

per cui il funzionale proposto è equivalente a

$$(\mathrm{sgn}(a)\delta(x)+\frac{b}{2|\alpha|}(\delta'(x-\alpha b)+\delta'(x+\alpha b),u(x)) , \qquad u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}) ,$$

la cui derivata è

$$-\mathrm{sgn}(a)u'(0)+\frac{b}{2|\alpha|}(u''(\alpha b)+u''(-\alpha b)) .$$

È utile osservare che si sarebbe potuto procedere sviluppando prima le derivate della θ e della δ, cioè

$$(\mathrm{sgn}(a)\delta(x)+\frac{1}{2|\alpha|}(\delta'(x-\alpha)+\delta'(x+\alpha)),u(bx)) ,$$

effettuare quindi il cambio di variabile $x=y/b$ ed eseguire infine la derivata richiesta.

5. $x\mapsto y=x^2$ è un diffeomorfismo dell'intervallo d'integrazione, quindi

$$\int_1^\infty 2xe^{-\alpha x^2+\beta x^4}u(x^2)dx=\int_1^\infty e^{-\alpha y+\beta y^2}u(y)dy=(e^{-\alpha x+\beta x^2}\theta(x-1),u(x)) ,$$

da cui $F\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ nei seguenti casi

A. $\Re\beta<0$, $\forall\Im\beta\in\mathbb{R}$, $\forall\alpha\in\mathbb{C}$,

B. $\Re\beta=0$, $\forall\Im\beta\in\mathbb{R}$, $\Re\alpha\geq 0$, $\forall\Im\alpha\in\mathbb{R}$.

La derivata richiesta è

$$((-\alpha+2\beta x)e^{-\alpha x+\beta x^2}\theta(x-1),u(x))+e^{-\alpha+\beta}u(1) .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 18.02.2013

1. Si determinino tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{e^{-z^2}}{\sin \frac{1}{z^2}} \ .$$

2. Sia C il cerchio di raggio b centrato nell'origine del piano complesso e percorso in senso antiorario. Si calcoli l'integrale
$$\int_C \frac{e^{iz^2}}{(z-a)^3} dz \ ,$$
per tutti i valori positivi di a.

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a-\cos\theta)^2} \ ,$$
$a > 1$.

4. Calcolare la derivata della distribuzione temperata
$$(|x - |x|| + x\theta(1-2x) + (x^2-8)\delta(x^2-1), u(x)) \ ,$$
$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

5. Determinare i possibili valori delle costanti $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ affinché
$$(e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}, u(x)) \ , \qquad (e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3}, u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
siano distribuzioni temperate regolari. Si determinino inoltre i valori di $\alpha_i \in \mathbb{C}$ per i quali $x^2 e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ appartiene a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ e/o a $\Theta_M(\mathbb{R})$.

1. $f(z)$ ha una singolarità essenziale non isolata in $z=0$, dovuta al termine $1/\sin(1/z^2)$. Infatti questa ha poli nei punti $z_{k,\pm}=\pm 1/\sqrt{k\pi}$, $k\in\mathbb{Z}$, con $z=0$ loro punto di accumulazione. Il punto all'infinito è una singolarità essenziale isolata dovuta al termine e^{-z^2}. Il punto $z=-i$ è un polo semplice.

2. Applicando la rappresentazione integrale di Cauchy per la derivata seconda di una funzione calcolata in un suo punto di analicità, si ha

$$\int_C \frac{e^{iz^2}}{(z-1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2}\frac{d^2}{dz^2}e^{iz^2}|_{z=1} = -\pi e^i(2+4i) \ .$$

3. L'integrando è analitico su tutto il cammino d'integrazione, con i punti $z=\pm 1$ singolarità apparenti. In vista della decomposizione, tramite la formula di Eulero, della funzione $\sin(\pi z)$, deformiamo, come usuale, il contorno d'integrazione in modo tale che esso passi sopra i punti $x=\pm 1$. Riscriviamo l'integrando nella forma

$$\frac{e^{i\pi z}-e^{-iz}}{2i(z-i)(z^2-1)} \ .$$

L'integrale si calcola applicando il lemma di Jordan e poi il teorema dei residui. L'integrale del termine $\frac{e^{i\pi z}}{2i(z-i)(z^2-1)}$ lungo la curva chiusa data dal cammino deformato unito con il semicerchio nel semipiano superiore vale

$$\frac{2\pi i}{2i}\frac{e^{i\pi z}}{z^2-1}|_{z=i} = -\frac{\pi}{2}e^{-\pi} \ .$$

Il contributo dovuto all'integrale di $-\frac{e^{-i\pi z}}{2i(z-i)(z^2-1)}$ lungo la curva chiusa data dal cammino deformato unito con il semicerchio nel semipiano inferiore, percorso in senso orario (di cui si deve tener conto ricordando il corrispondente segno meno), è

$$\frac{2\pi i}{2i}\Big[\frac{e^{-i\pi z}}{(z-i)(z-1)}|_{z=-1} + \frac{e^{-i\pi z}}{(z-i)(z+1)}|_{z=1}\Big] = -\frac{\pi}{2} \ .$$

Si ha quindi

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\pi x)}{(x-i)(x^2-1)}dx = -\frac{\pi}{2}(1+e^{-\pi}) \ .$$

Nel caso del secondo integrale, si noti che ponendo $z=e^{i\theta}$ si ha $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e l'integrale richiesto è equivalente a $\oint_C f(z)dz$, con C il cerchio di raggio unitario centrato in 0 percorso in senso antiorario e

$$f(z) = \frac{1}{iz(3-\frac{1}{2}(z+z^{-1}))^2} = \frac{4z}{i(z^2-6z+1)^2} = \frac{4z}{i(z-z_1)^2(z-z_2)^2} \ ,$$

dove $z_1 = 3-2\sqrt{2}$, $z_2 = 3+2\sqrt{2}$. L'unica singolarità all'interno di C si ha per $z=z_1$. Utilizzando la rappresentazione integrale di Cauchy

$$\frac{d^n g(z)}{dz^n} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{g(z')}{(z'-z)^{n+1}}dz' \ , \qquad n\in\mathbb{N} \ ,$$

con γ una qualsiasi curva chiusa che contenenga z in modo tale che la sua orientazione rispetto a z sia antioraria[1] e al cui interno e su di essa non vi siano singolarità di $g(z)$, si ha

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \frac{dh(z)}{dz}|_{z=z_1} \ ,$$

con $h(z) = \frac{4z}{i(z-z_2)^2}$. Quindi

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(3-\cos\theta)^2} = 8\pi \frac{z_1+z_2}{(z_2-z_1)^3} = \frac{3}{8\sqrt{2}}\pi \ .$$

4. Sia $x\theta(1-2x)$ che $(x^2-2)\delta(x^2-1)$ sono prodotti di elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$ per elementi di $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, per cui sono distribuzioni temperate. Il funzionale in questione è quindi una distribuzione temperata. Si noti che spesso il calcolo si semplifica utilizzando la relazione $f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0)$. Per esempio $(x^2-2)\delta(x^2-1) = -\delta(x^2-1) = -(\delta(x-1)+\delta(x-1))/2$. Utilizzando

   - la funzione segno $\epsilon(x) := \theta(x) - \theta(-x)$
   - $|x-1|^2 = (x-1)^2$
   - $\theta(\alpha x) = \theta(x)$ per $\alpha > 0$ e $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$

   si ha
$$|x-1| + |x-1|^2 + x\theta(1-2x) + (x^2-2)\delta(x^2-1) =$$
$$(x-1)\epsilon(x-1) + (x-1)^2 + x(1-\theta(x-1/2)) - \frac{1}{2}(\delta(x-1)+\delta(x+1)) \ .$$

   Il calcolo della derivata richiesta è quindi immediato: osservando che $\epsilon'(x-1) = 2\delta(x-1)$, si ha

$$(\epsilon(x-1)+2x-1-\theta(x-1/2)-\frac{1}{2}\delta(x-1/2)-\frac{1}{2}(\delta'(x-1)+\delta'(x+1)), u(x)) =$$

$$(\epsilon(x-1)+2x-1-\theta(x-1/2), u(x)) - \frac{1}{2}u(1/2) + \frac{1}{2}(u'(1)+u'(-1)) \ .$$

5. $e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ è distribuzione temperata regolare se $\Re\alpha_1 > 0$, $\forall \Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\alpha_2 \in \mathbb{C}$, oppure se $\Re\alpha_1 = \Im\alpha_2 = 0$, $\forall\Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Nel caso di $e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3}$ si deve avere $\Re\beta_1 = \Im\beta_2 = 0$, $\forall\Im\beta_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\beta_2 \in \mathbb{R}$. $x^2 e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}$ appartiene sia a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ che a $\Theta_M(\mathbb{R})$ per $\Re\alpha_1 > 0$, $\forall\alpha_2 \in \mathbb{C}$ ed appartiene solamente a $\Theta_M(\mathbb{R})$ nel caso $\Re\alpha_1 = \Im\alpha_2 = 0$, $\forall\Im\alpha_1 \in \mathbb{R}$, $\forall\Re\alpha_2 \in \mathbb{R}$.

[1] Se si considera la compattificazione di Alexandrov di $\mathbb{C}$, $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, risulta chiaro che qualsiasi chiusa curva γ racchiude tutti i punti di $\hat{\mathbb{C}}\backslash\gamma$. Comunque, come usuale, un punto si intende interno a γ se tale curva è orientata in senso antiorario rispetto ad esso.

Compitino di Istituzioni di Metodi Matematici - 20.05.2013

1. Determinare, a meno di una costante immaginaria additiva, la funzione analitica f sapendo che
$$\Re f(z) = (e^{x+y} + e^{-x-y}) \cos(x-y) \ ,$$
$z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si descrivano tutte le singolarità e i residui della funzione
$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} + \frac{1}{1 - \sin \frac{1}{z-1}} \ ,$$
$z \in \mathbb{C}$, specificando sia l'ordine degli eventuali poli che la natura delle eventuali singolarità essenziali, cioè se sono isolate o non isolate.

3. Si calcoli l'integrale
$$I(n) = \int_{|z|=r} \left[(z+1)^n + \frac{1}{(z+1)^{2n}}\right] e^{\frac{z-1}{z+1}} dz \ ,$$
$n \in \mathbb{N}_+$, $r > 1$.

1.
$$\Re f(z) = \frac{1}{2}\big(e^{x+y} + e^{-x-y}\big)\big[e^{i(x-y)} + e^{-i(x-y)}\big]$$
$$= \frac{1}{2}\big[e^{(1+i)x+(1-i)y} + e^{(1-i)x+(1+i)y} + e^{(i-1)x-(1+i)y} + e^{-(1+i)x+(i-1)y}\big] \ .$$

Onde evitare banali errori può essere utile scrivere esplicitamente le seguenti relazioni

$$\begin{aligned} x+iy &= z \ , & -ix+y &= -iz \ , \\ ix-y &= iz \ , & -x-iy &= -z \ , \\ x-iy &= \bar z \ , & ix+y &= i\bar z \ , \\ -ix-y &= -i\bar z \ , & -x+iy &= -\bar z \ . \end{aligned}$$

Si ha

$$\begin{aligned} \Re f(z) &= \frac{1}{2}\big[e^{(1+i)\bar z} + e^{(1-i)z} + e^{(i-1)z} + e^{-(1+i)\bar z}\big] \\ &= \Re[e^{(1-i)z} + e^{-(1-i)z}] \\ &= \Re[e^{i(-i-1)z} + e^{-i(-i-1)z}] \\ &= 2\Re\cos[(1+i)z]. \end{aligned}$$

Quindi $f(z) = 2\cos[(1+i)z] + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. $z = 0$ è singolarità essenziale isolata. Il denominatore del secondo termine è nullo quando $(z-1)^{-1} = (4k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, cioè quando z assume i valori
$$z_k = 1 + \frac{2}{\pi(4k+1)} \ .$$
Segue che $z = 1$ è punto d'accumulazione di poli di f, quindi singolarità essenziale non isolata di f. Tali poli sono del secondo ordine. Questo segue dal fatto che $1 - \sin\frac{1}{z-1}$ e la sua derivata prima si annullano per $z = z_k$, mentre la derivata seconda non è nulla in $z = z_k$. Ai fini didattici è utile riportare tutti i passaggi

$$\begin{aligned} 1 - \sin\frac{1}{1-z} &= -(z-z_k)\frac{1}{(1-z)^2}\cos\frac{1}{1-z}\Big|_{z=z_k} \\ &\quad - \frac{(z-z_k)^2}{2!}\Big[\frac{2}{(1-z)^3}\cos\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^4}\sin\frac{1}{1-z}\Big]_{z=z_k} \\ &\quad - \frac{(z-z_k)^3}{3!}\Big[\frac{6}{(1-z)^4}\cos\frac{1}{1-z} - \frac{2}{(1-z)^5}\sin\frac{1}{1-z} \\ &\quad - \frac{4}{(1-z)^5}\sin\frac{1}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^6}\cos\frac{1}{1-z}\Big]_{z=z_k} + \ldots \\ &= \frac{1}{2(1-z_k)^4}(z-z_k)^2 + \frac{1}{(1-z_k)^5}(z-z_k)^3 + \ldots \ . \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il residuo in z_k, trattandosi di un polo doppio si ha

$$\mathrm{Res}\{f(z)\}_{z=z_k} = \lim_{z\to z_k}\frac{d}{dz}\frac{(z-z_k)^2}{1-\sin\frac{1}{1-z}} = \frac{32}{\pi^3(4k+1)^3} \ ,$$

come segue applicando la regola di dell'Hôpital. È comunque istruttivo mostrare un modo equivalente del calcolo di tale limite, calcolo che utilizza la precedente espansione in potenze di $z-z_k$. In generale, se una funzione $h(z)$ ha uno zero doppio, allora $h(z) = (z-z_k)^2 g(z)$, con $g(z_k) \neq 0$, da cui

$$\mathrm{Res}\{\frac{1}{h(z)}\}_{z=z_k} = \lim_{z\to z_k} \frac{d}{dz}\frac{1}{g(z)} = -\frac{g'(z_k)}{g(z_k)^2} \ .$$

D'altronde, sviluppando in serie

$$g(z) = a_0 + a_1(z-z_k) + \dots \ ,$$

da cui segue

$$\mathrm{Res}\{\frac{1}{h(z)}\}_{z=z_k} = -\frac{a_1}{a_0^2} \ .$$

Nel caso in esame si ha $a_0 = \frac{1}{2(1-z_k)^4}$ e $a_1 = \frac{1}{(1-z_k)^5}$, quindi

$$\mathrm{Res}\{f(z)\}_{z=z_k} = -4(1-z_k)^3 = \frac{32}{\pi^3(4k+1)^3} \ .$$

Per il calcolo del residuo di all'infinito del secondo termine, scegliamo la coordinata $t = (z-1)^{-1}$. Il residuo all'infinito è il coefficiente del termine t^{-1} nello sviluppo in serie di Laurent intorno a $t=0$ della funzione

$$-\frac{1}{t^2}\frac{1}{1-\sin t} \ .$$

Essendo

$$-\frac{1}{t^2}\frac{1}{1-\sin t} = -\frac{1}{t^2}(1+t+\dots) \ ,$$

tale residuo vale -1.

Il residuo in $z=0$ è dovuto al termine $e^{\frac{1}{z}}$. In tal caso il residuo vale 1. Poiché la somma totale dei residui di $e^{\frac{1}{z}}$ deve esser nulla, segue che il suo residuo all'infinito è -1.

3. Si ha

$$I(n) = e\int_{|z|=r} \left[(z+1)^n + \frac{1}{(z+1)^{2n}}\right] e^{-\frac{2}{z+1}} dz \ ,$$

il cui valore è $2\pi i e$ volte il residuo dell'integrando nel punto $z=-1$. Il termine $\frac{e^{-\frac{2}{z+1}}}{(z+1)^{2n}}$ non contribuisce in quanto lo sviluppo di Laurent in potenze di $z+1$ non contiene $(z+1)^{-1}$. Al contrario, il coefficiente di tale termine nello sviluppo di Laurent

$$(z+1)^n e^{-\frac{2}{z+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-2)^k (z+1)^{n-k} \ ,$$

è $(-2)^{n+1}/(n+1)!$, da cui segue

$$I(n) = -\frac{(-2)^{n+2}\pi i e}{(n+1)!} \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 17.06.2013

1. Determinare, a meno di una costante immaginaria additiva, la funzione analitica f sapendo che ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$)

$$\Re f(z) = 2\cos(x^2 - y^2)(e^{-2xy} + e^{2xy}) \ .$$

2. Si descrivano tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{\sin z} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(\pi x)}{(x^2+1)(2x-1)} dx \ .$$

4. Si dimostri che il funzionale

$$(2(x-1)\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-2x) + 2(x+1)\frac{d}{dx}\delta(x^2-1), u(x)) \ ,$$

$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

5. Si calcoli la derivata della distribuzione temperata

$$((1-x)|x| + (1-x^2)\theta(-\sqrt{2}x), u(x)) + \int_0^1 e^{-x^2} u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

1.

$$\begin{aligned}\Re f(z) &= e^{i(x^2-y^2)-2xy} + e^{i(x^2-y^2)+2xy} + e^{-i(x^2-y^2)-2xy} + e^{-i(x^2-y^2)+2xy} \\ &= e^{iz^2} + e^{i\bar{z}^2} + e^{-i\bar{z}^2} + e^{-iz^2} \\ &= 4\Re\cos z^2 \ ,\end{aligned}$$

per cui $f(z) = 4\cos z^2 + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. $f(z)$ ha una singolarità essenziale isolata in $z = 2$. Inoltre ha poli semplici nei punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Poiché $z = \infty$ è punto d'accumulazione di poli, questo è singolarità essenziale non isolata di $f(z)$.

3. Il teorema di Cauchy implica che il valore dell'integrale è invariato se il contorno d'integrazione è modificato ad un contorno che scavalca la singolarità apparente in $x = 1/2$. Ciò è vero se la differenza tra il contorno originale, cioè l'asse reale, e quello deformato, non racchiude singolarità dell'integrando. Successivamente poniamo $\cos(\pi z) = (e^{i\pi z} + e^{-i\pi z})/2$. In proposito si noti che il contorno d'integrazione è sul piano complesso, per questo utilizziamo la variabile z. Si ottengono quindi due integrali. Utilizzando il lemma di Jordan, i due integrali corrispondono a $2\pi i$ volte il residuo in $z = i$ di $\frac{e^{i\pi z}}{2(z^2+1)(2z-1)}$, meno $2\pi i$ volte la somma del residuo in $z = -i$ e $z = 1/2$ di $\frac{e^{-i\pi z}}{2(z^2+1)(2z-1)}$. Si ricordi che il segno meno è dovuto all'orientazione oraria del contorno d'integrazione indotta dalla chiusura alla Jordan nel semipiano inferiore. Quindi il valore dell'integrale proposto è

$$\begin{aligned}I &= \pi i \mathrm{Res}\Big\{\frac{e^{i\pi z}}{(z^2+1)(2z-1)}\Big\}_{z=i} - \pi i \mathrm{Res}\Big\{\frac{e^{-i\pi z}}{(z^2+1)(2z-1)}\Big\}_{z=-i} \\ &- \pi i \mathrm{Res}\Big\{\frac{e^{-i\pi z}}{(z^2+1)(2z-1)}\Big\}_{z=1/2} \\ &= -\frac{\pi}{10}(1+2i)e^{-\pi} - \frac{\pi}{10}(1-2i)e^{-\pi} - \frac{2}{5}\pi \\ &= -\frac{\pi}{5}(2 + e^{-\pi}) \ .\end{aligned}$$

4. Il funzionale proposto, che denotiamo con $F(u)$, è somma di termini ognuno corrispondente ad una distribuzione temperata moltiplicata per elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$. Quindi $F(u) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Si ha

$$\begin{aligned}F(u) &= (2(x-1)\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-2x) + 2(x+1)\frac{d}{dx}\delta(x^2-1), u(x)) \\ &= (-2(x-1)\delta'(x-1/2) + (x+1)(\delta'(x-1) + \delta'(x+1)), u(x)) \\ &= (-\delta'(x-1/2), 2(x-1)u(x)) + (\delta'(x-1) + \delta'(x+1), (x+1)u(x)) \\ &= (2u(x) + 2xu'(x) - 2u'(x))|_{x=1/2} - (u(x) + (x+1)u'(x))|_{x=1} \\ &- (u(x) + (x+1)u'(x))|_{x=-1} \\ &= 2u(1/2) - u'(1/2) - u(1) - u(-1) - 2u'(1) \\ &= (2\delta(x-1/2) + \delta'(x-1/2) - \delta(x-1) - \delta(x+1) + 2\delta'(x-1), u(x)) \ ,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}F'(u) &= (2\delta'(x-1/2)+\delta''(x-1/2)-\delta'(x-1)-\delta'(x+1)+2\delta''(x-1), u(x)) \\ &= -2u'(1/2)+u''(1/2)+u'(1)+u'(-1)+2u''(1)\ .\end{aligned}$$

Si osservi che poiché la derivata di una distribuzione (f,u) è $-(f,u')$, segue che se una parte di questa, $(f-g,u)$, è esprimibile come combinazione lineare della funzione di prova e delle sue derivate calcolate in un insieme di punti, cioè se

$$(f,u)=(g,u)+\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}c_{j,k}u^{(j)}(x_k)\ ,$$

allora, poiché

$$u^{(j)}(x_k)=((-1)^j\delta^{(j)}(x-x_k),u(x))\ ,$$

e

$$((-1)^j\delta^{(j+1)}(x-x_k),u(x))=-u^{(j+1)}(x_k)\ ,$$

si ha

$$(f',u)=-(f,u')=-(g,u')-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{m}c_{j,k}u^{(j+1)}(x_k)\ .$$

Si noti che nell'esercizio in considerazione $g=0$. In particolare, quanto detto implica che dall'espressione

$$F(u)=2u(1/2)-u'(1/2)-u(1)-u(-1)-2u'(1)\ ,$$

segue immediatamente che

$$F'(u)=-2u'(1/2)+u''(1/2)+u'(1)+u'(-1)+2u''(1)\ .$$

5. La distribuzione temperata proposta è equivalente a

$$(x-x^2)\epsilon(x)+(1-x^2)(1-\theta(x))+e^{-x^2}(\theta(x)-\theta(x-1))\ .$$

Utilizzando la seguente espressione per la funzione segno

$$\epsilon(x)=\theta(x)-\theta(-x)=2\theta(x)-1\ ,$$

la distribuzione temperata si riduce a

$$(1-x+[e^{-x^2}-(x-1)^2]\theta(x)-e^{-x^2}\theta(x-1),u(x))\ .$$

La derivata richiesta è quindi

$$-(1+2(xe^{-x^2}+x-1)\theta(x)-2xe^{-x^2}\theta(x-1)+e^{-1}\delta(x-1),u(x))\ ,$$

cioè

$$(-1+2(1-x-xe^{-x^2})\theta(x)+2xe^{-x^2}\theta(x-1),u(x))-e^{-1}u(1)\ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 03.07.2013

1. Determinare, a meno di una costante immaginaria additiva, la funzione analitica f sapendo che ($z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$)
$$\Re f(z) = x^2 - y^2 - 2(xy + x + y) - 1 \ .$$

2. Si descrivano tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = e^{\frac{i}{z-i}} + \cos z \ .$$

3. Si calcolino gli integrali
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 1} dx \ .$$
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2 + 1} dx \ .$$

4. Dopo aver espresso la distribuzione temperata
$$((x^2 + 1)\frac{d^2}{dx^2}\theta(-\sqrt{3}x) + (x^2 - 1)\frac{d}{dx}\delta(x^2 - 4), u(x)) \ ,$$
$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nella forma $\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} c_{j,k} u^{(j)}(x_k)$, dove $c_{j,k}$ sono coefficienti numerici e $x_k \in \mathbb{R}$, se ne calcoli la derivata nel senso delle distribuzioni.

5. Si calcoli la derivata seconda, nel senso delle distribuzioni, del funzionale
$$(\log(x + i0) + x|x|, u(x)) + \int_0^1 (u(x) + u(-x))dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

1.

$$\begin{aligned}
\Re f(z) &= \frac{1}{4}[(z+\bar{z})^2 + (z-\bar{z})^2] + \frac{i}{2}(z+\bar{z})(z-\bar{z}) - z - \bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 \\
&= \frac{1+i}{2}z^2 + \frac{1-i}{2}\bar{z}^2 - z - \bar{z} + iz - i\bar{z} - 1 \\
&= \Re[(1+i)(z+i)^2] \ ,
\end{aligned}$$

per cui $f(z) = (1+i)(z+i)^2 + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. $f(z)$ ha una singolarità essenziale isolata in $z = i$ ed un'altra all'infinito dovuta al termine $\cos z$. Si osservi che la singolarità essenziale isolata di $\cos z$, dovuta a ciascuno dei due esponenziali e^{iz} e e^{-iz}, à anche punto d'accumulazione degli zeri $z_k = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Come spiegato nelle dispense, un tale punto d'accumulazione è di per sé una singolarità essenziale isolata.

3. Il termine $3x/(x^4+1)$ è dispari in x per cui il suo integrale su intervallo simmetrico è nullo. Il resto si calcola immediatamente utilizzando il lemma di Jordan che riduce l'integrale ad un calcolo di residui. Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{2x^2+3x}{x^4+1} dx = \pi\sqrt{2} \ .$$

Il secondo integrale si risolve con tecniche analoghe

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \pi e^{-1} \ .$$

4. Il funzionale proposto, che denotiamo con $F(u)$, è equivalente a

$$\begin{aligned}
F(u) &= (-(x^2+1)\delta'(x) + \frac{x^2-1}{4}(\delta'(x-2) + \delta'(x+2)), u(x)) \\
&= u'(0) - \frac{3}{4}(u'(2) + u'(-2)) - u(2) + u(-2) \ ,
\end{aligned}$$

da cui

$$F'(u) = -u''(0) + \frac{3}{4}(u''(2) + u''(-2)) + u'(2) - u'(-2) \ .$$

5. Ponendo $y = -x$ si ha

$$\int_0^1 u(-x)dx = -\int_0^{-1} u(y)dy = \int_{-1}^0 u(y)dy \ ,$$

quindi

$$\int_0^1 (u(x) + u(-x))dx = \int_{-1}^1 u(x)dx = (\theta(x+1) - \theta(x-1), u(x)) \ .$$

È praticamente immmediato verificare che la derivata seconda richiesta è

$$(-P\Big(\frac{1}{x^2}\Big) + 2\epsilon(x), u(x)) + i\pi u'(0) - u'(-1) + u'(1) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 13.09.2013

1. Si descrivano tutte le singolarità della funzione

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}} + \frac{1}{\cos\frac{1}{z^2}} \ ,$$

$z \in \mathbb{C}$.

2. Si calcoli l'integrale

$$\int_{|z|=2} \left[\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2} + \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z+1} \right] dz \ .$$

3. Si calcoli l'integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin\theta} d\theta \ .$$

4. Si provi che

$$(|x|^3 + x\theta(-x) + (x^2-1)\delta(x^2-2), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

5. Determinare i possibili valori delle costanti $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ affinché

$$(\theta(-x)e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x} + \theta(x)e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3}, u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

sia una distribuzione temperata e calcolarne, per tali valori, la derivata.

1. La funzione proposta ha poli nei punti
$$z_k = \pm\sqrt{\frac{2}{\pi + 2k\pi}}\ ,$$
$k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Da cui si evince che $z = 0$ è punto d'accumulazione di poli semplici, ed è quindi una singolarità essenziale non isolata. Il termine $e^{z+\frac{1}{z}}$ ha singolarità essenziali isolate in $z = 0$ e $z = \infty$. Quindi, oltre ai poli semplici descritti, la funzione proposta ha una singolarità essenziale non isolata in 0 ed una isolata in $z = \infty$.

2. Si ha
$$\text{Res}\Big\{\frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}\Big\}_{z=1} = \frac{d}{dz}e^{z-1}|_{z=1} = 1\ ,$$
$$\text{Res}\Big\{\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z+1}\Big\}_{z=-1} = \frac{d}{dz}e^{\frac{1}{z-1}}|_{z=-1} = e^{-1/2}\ ,$$
Per quanto riguarda il residuo in $z = 1$ del termine $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z+1}$, si osservi che in tal caso il suo sviluppo in serie di Laurent intorno a $z = 1$ contiene un'infinità di termini $z+1$ con potenza negativa. Per questo, non è possibile utilizzare la tecnica precedente per il calcolo del residuo. D'altronde
$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1-z}{2}} = -\sum_{k=0}^{\infty}(-1/2)^{k+1}(z-1)^k\ ,$$
da cui segue
$$\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z+1} = -\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-1/2)^{j+1}\frac{(z-1)^{j-k}}{k!}\ .$$
Il coefficiente del termine $(z-1)-1$ è quello con $j-k = -1$, cioè $k = j+1$, che è
$$-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1/2)^{j+1}}{(j+1)!} = -\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1/2)^j}{j!} = -\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1/2)^j}{j!} + 1 = -e^{-1/2} + 1\ .$$
Quindi
$$\text{Res}\Big\{\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z+1}\Big\}_{z=1} = -e^{-1/2} + 1\ ,$$
e il valore dell'integrale proposto è
$$2\pi i(1 + e^{-1/2} - e^{-1/2} + 1) = 4\pi i\ .$$

3. Ponendo $z = e^{i\theta}$, si ha $d\theta = -idz/z$ e $\sin\theta = (z - z^{-1})/2i$, da cui segue che l'integrale richiesto è equivalente a
$$2\pi\sum_{res.\,in\,S^1}\frac{2i}{z^2 + 4iz - 1}\ .$$
L'unico polo interno al cerchio è nel punto $-2i + i\sqrt{3}$, il cui residuo è $1/\sqrt{3}$. L'integrale vale quindi
$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\ .$$

4. Si tratta di somma di termini dati da elementi di $\Theta_M(\mathbb{R})$ che moltiplicano distribuzionii temperate. Si tratta quindi di una distribuzione temperata. Si ricordi che $\epsilon(x) = \theta(x) - \theta(-x)$, da cui $\epsilon'(x) = 2\delta(x)$. Inoltre

$$(x^2-1)\delta(x^2-2) = (x^2-2+1)\delta(x^2-2) = \delta(x^2-2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\delta(x-\sqrt{2})+\delta(x+\sqrt{2})) \ .$$

La derivata richiesta risulta quindi

$$(3x^2\epsilon(x) + \theta(-x), u(x)) - \frac{1}{2\sqrt{2}}(u'(-\sqrt{2}) + u'(\sqrt{2})) \ .$$

5. Può essere utile riscrivere il funzionale nella forma

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x} u(x)dx + \int_{0}^{\infty} e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3} u(x)dx \ .$$

Consideriamo il primo integrale. Essendo interessati all'andamento per $x \to -\infty$, e poiché $i\alpha_2 x = i\Re\alpha_2 x - \Im\alpha_2 x$, possiamo riscrivere l'esponenziale nella forma

$$e^{-x^2(\Re\alpha_1 + \Im\alpha_2 x^{-1}) + i(\Im\alpha_1 x^2 + \Re\alpha_2 x)} \ .$$

Quindi affinché il primo integrale sia una distribuzione temperata si deve avere

$$\Re\alpha_1 > 0 \ , \qquad \forall\, \Im\alpha_1 \ , \qquad \forall\, \Re\alpha_2 \ , \qquad \forall\, \Im\alpha_2 \ ,$$

oppure

$$\Re\alpha_1 = 0 \ , \qquad \forall\, \Im\alpha_1 \ , \qquad \forall\, \Re\alpha_2 \ , \qquad \Im\alpha_2 \leq 0 \ .$$

Consideriamo il secondo integrale. Si ha $-i\beta_2 x^3 = -i\Re\beta_2 x^3 + \Im\beta_2 x^3$, quindi l'esponenziale è riscrivibile nella forma

$$e^{x^3(\Im\beta_2 - \Re\beta_1 x^{-2}) + i(\Re\beta_2 x^3 + \Im\beta_1 x)} \ .$$

Segue che le condizioni che devono soddisfare β_1 e β_2 affinché il secondo integrale sia una distribuzione temperata sono

$$\Im\beta_2 < 0 \ , \qquad \forall\, \Im\beta_1 \ , \qquad \forall\, \Re\beta_2 \ , \qquad \forall\, \Re\beta_1 \ ,$$

oppure

$$\Im\beta_2 = 0 \ , \qquad \forall\, \Im\beta_1 \ , \qquad \forall\, \Re\beta_2 \ , \qquad \Re\beta_1 \geq 0 \ .$$

Il calcolo della derivata è immediato. I termini con le delta si elidono e rimane

$$(\theta(-x)(i\alpha_2 - 2\alpha_1 x)e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x} - \theta(x)(\beta_1 + 3i\beta_2 x^2)e^{-\beta_1 x + i\beta_2 x^3}, u(x)) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 19.09.2013

1. Determinare, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$, sapendo che
$$\Re f(z) = e^{-y}(x\cos x - y\sin x) \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si calcoli l'integrale
$$\int_0^{2\pi} \left[(\cos\theta)^{2n} + (\cos\theta)^{2n+1}\right] d\theta \ ,$$
$n = 0, 1, 2, \ldots$.

3. Si calcoli l'integrale
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin(2\pi x)}{(2x+1)(x^2+1)} dx \ ,$$

4. Si determinino i valori della costante $a \geq 0$ tali per cui
$$(x^2\theta(3-2x) + (x^2-2)\delta(x^2-a), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli, per tali valori, la derivata.

5. Determinare i possibili valori delle costanti $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}$ affinché
$$\int_{-2}^{1} e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x} u(x) dx + \int_0^{\infty} e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3} u(-x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
sia una distribuzione temperata e calcolarne, per tali valori, la derivata.

1. Si ha

$$\begin{aligned}
\Re f(z) &= \frac{e^{-y}}{2}\left[x(e^{ix}+e^{-ix})+iy(e^{ix}-e^{-ix})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[e^{ix-y}(x+iy)+e^{-ix-y}(x-iy)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(ze^{iz}+\bar{z}e^{-i\bar{z}}\right) \\
&= \Re\left(ze^{iz}\right) ,
\end{aligned}$$

quindi $f(z) = ze^{iz} + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Ponendo $z = e^{i\theta}$ si ha $d\theta = -idz/z$. Quindi

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2n}d\theta &= -\frac{i}{2^{2n}}\oint_{|z|=1}(z+z^{-1})^{2n}\frac{dz}{z} = \\
&= -\frac{i}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{2n}\tbinom{2n}{k}\oint_{|z|=1}z^{2n-2k-1}dz .
\end{aligned}$$

L'unico integrale non nullo è quello con $k = n$, quindi

$$\int_0^{2\pi}(\cos\theta)^{2n}d\theta = \pi 2^{1-2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} .$$

Il contributo dal secondo termine nell'integrando è nullo in quanto corrispondente ad una somma di integrali del tipo $\oint_{|z|=1} z^{2n-2k}dz$, che sono nulli per ogni k e n interi.

3. L'integrale proposto si riduce, dopo l'applicazione del lemma di Jordan, alla somma dei seguenti tre termini. Il primo dovuto al residuo in $z = i$.

$$\frac{2\pi i}{2i}\mathrm{Res}\Big[\frac{ze^{2\pi iz}}{(2z+1)(z^2+1)}\Big]_{z=i} = \pi\frac{(1-2i)e^{-2\pi}}{10} .$$

Il secondo e terzo resiudo contribuiscono all'integrale insieme ad un fattore π. Quest'ultimo è dovuto all'usuale termine $-2\pi i$, con il segno meno dovuto all'orientazione oraria, e al fattore $-1/(2i)$ proveniente dalla decomposizione di $\sin(2\pi z)$ in esponenziali. Quindi il contributo all'integrale dovuto ai due residui è

$$\frac{2\pi i}{2i}\mathrm{Res}\Big[\frac{ze^{-2\pi iz}}{(2z+1)(z^2+1)}\Big]_{z=-i} = \pi\frac{(1+2i)e^{-2\pi}}{10} ,$$

$$\frac{2\pi i}{2i}\mathrm{Res}\Big[\frac{ze^{2\pi iz}}{(2z+1)(z^2+1)}\Big]_{z=-1/2} = \frac{1}{5} ,$$

dove nel secondo e terzo residuo Quindi l'integrale richiesto vale

$$\frac{1}{5}(1+e^{-2\pi}) .$$

4. $\delta(f(x))$ è ben definita solamente quando $f(x)$ è una funzione con zeri semplici. Nel caso proposto, essendo $\delta(x^2-a)$ con $a \geq 0$, è necessario imporre $a \neq 0$. Il funzionale proposto è una somma di termini dati da una distribuzione temperata moltiplicata per un elemento di $\Theta_M(\mathbb{R})$, quindi tale funzionale è una distribuzione temperata. È utile riscrivere la distribuzione nella forma
$$x^2\theta(3/2-x)+(a-2)\delta(x^2-a) = x^2\theta(3/2-x)+\frac{(a-2)}{2\sqrt{a}}(\delta(x-\sqrt{a})+\delta(x+\sqrt{a}))\ ,$$
da cui segue che la derivata richiesta è
$$(2x\theta(3/2-x), u(x)) - \frac{9}{4}u(3/2) + \frac{2-a}{2\sqrt{a}}(u'(\sqrt{a}) + u'(-\sqrt{a}))\ .$$

5. Il primo integrale è una distribuzione temperata per qualsiasi valore delle costanti α_i, β_i. Per quanto riguarda il secondo integrale, è utile cambiare segno ponendo $y=-x$, in tal modo $dx=-dy$ e, ricordando di cambiare segno agli estremi d'integrazione, si ha
$$\int_0^\infty e^{-\beta_1 x - i\beta_2 x^3} u(-x)dx = -\int_0^{-\infty} e^{\beta_1 y - i\beta_2 y^3} u(y)dy = \int_{-\infty}^0 e^{\beta_1 y - i\beta_2 y^3} u(y)dy\ .$$
È immediato verificare che affinché tale integrale sia una distribuzione temperata, devono essere soddisfatte le condizioni
$$\Im\beta_2 < 0\ , \quad \forall\Re\beta_1\ , \quad \forall\Im\beta_1\ , \quad \forall\Re\beta_2\ ,$$
$$\Im\beta_2 = 0\ , \quad \Re\beta_1 \geq 0\ , \quad \forall\Im\beta_1\ , \quad \forall\Re\beta_2\ .$$
Per il calcolo della derivata è utile riscrivere la distribuzione nella forma
$$((\theta(x+2)-\theta(x-1))e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x} + \theta(-x)e^{\beta_1 x + i\beta_2 x^3}, u(x)\ .$$
La derivata richiesta è quindi
$$e^{-4\alpha_1 - 2i\alpha_2}u(-2) - e^{-\alpha_1 + i\alpha_2}u(1) - u(0) +$$
$$((\beta_1 + 3i\beta_2 x^2)\theta(-x)e^{\beta_1 x + i\beta_2 x^3} + (i\alpha_2 - 2\alpha_1 x)(\theta(x+2)-\theta(x-1))e^{-\alpha_1 x^2 + i\alpha_2 x}, u(x))\ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 3.02.2014

1. Determinare, a meno di una costante additiva, la funzione analitica $f(z)$ sapendo che
$$\Re f(z) = -e^x(x \sin y + y \cos y) \ ,$$
$z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Si descrivano le singolarità della funzione
$$f(z) = e^{\frac{1}{z-1}} + \frac{1}{\sin^2 z} \ .$$

3. Si calcoli l'integrale
$$\oint_{|z|=2} \frac{e^z + z}{z+1} dz \ .$$

4. Si calcoli l'integrale
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \ .$$

5. Si mostri che
$$\left(\frac{1}{x - i0} + x\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-3x) - \frac{d}{dx}\delta(x^3 - 3x^2 + 2x), u(-x)\right) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata.

1. Si ha

$$\begin{aligned}\Re f(z) &= \frac{e^x}{2}\big[-ix(e^{iy}-e^{-iy})+y(e^{iy}+e^{-iy})\big] \\ &= -\frac{i}{2}x(e^z-e^{\bar z})+\frac{1}{2}y(e^z+e^{\bar z}) \\ &= \Re\big(-ize^z\big) \ ,\end{aligned}$$

quindi $f(z) = -ize^z + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Il termine $e^{\frac{1}{z-1}}$ ha una singolarità essenziale isolata in $z = 1$. Il termine $\frac{1}{\sin^2 z}$ ha poli doppi nei punti $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Il punto all'infinito è una singolarità essenziale non isolata in quanto punto d'accumulazione dei poli doppi z_k. Il fatto che ∞ sia punto d'accumulazione segue osservando che nella coordinata $w = 1/z$, i poli doppi sono $w_k = 1/(k\pi)$, da cui risulta che $w = 0$, cioè $z = \infty$, è punto d'accumulazione di poli.

3. Un immediato calcolo di residui, o, equivalentemente, riscrivendo il numeratore dell'integrando nella forma $e^{-1}e^{z+1}+z+1-1$, mostra che l'integrale vale $2\pi i(e^{-1}-1)$.

4. Grazie al teorema di Cauchy possiamo modificare il contorno d'integrazione. Lo scegliamo coincidente con $\mathbb{R}$, eccetto per la semicironferenza passante sul piano complesso superiore e centrata in $z = 0$. Esprimendo $\sin^2 z$ in termini di funzioni esponenziali, segue che l'unico integrale che contribuisce è

$$\int_\Gamma \frac{2-e^{2iz}}{4z^2}dz = \frac{\pi i}{2}\frac{d}{dz}e^{-2iz}|_{z=0} = \pi \ ,$$

dove Γ, la cui orientazione è oraria, è il contorno descritto precedentemente, unito alla semicirconferenza di raggio infinito, con base $\mathbb{R}$ e contenuta nel piano complesso inferiore.

5. Si osservi che poiché

$$\Big(\frac{1}{x-i0}+x\frac{d^2}{dx^2}\theta(1-3x)-\frac{d}{dx}\delta(x^3-3x^2+2x), u(-x)\Big)$$

$$= \Big(-\frac{1}{x+i0}-x\frac{d^2}{dx^2}\theta(x+\frac{1}{3})+\frac{d}{dx}\delta(-x^3-3x^2-2x), u(x)\Big) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

la distribuzione temperata in questione è

$$-\frac{1}{x+i0}-x\frac{d^2}{dx^2}\theta(x+\frac{1}{3})+\frac{d}{dx}\delta(-x^3-3x^2-2x) \ .$$

Per dimostrare che si tratta effettivamente di distribuzione temperata si noti che tale è il primo addendo. Il secondo è una distribuzione temperata moltiplicata per un moltiplicatore, per cui è una distribuzione temperata essa stessa. L'argomento della δ è un polinomio con zeri semplici, si ha quindi

$$\frac{d}{dx}\delta(-x^3-3x^2-2x) = \frac{1}{2}\delta'(x)+\delta'(x+1)+\frac{1}{2}\delta'(x+2) \ ,$$

che è una distribuzione temperata. Il funzionale proposto è quindi definito dalla distribuzione temperata

$$-\frac{1}{x+i0} - x\delta'(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta'(x) + \delta'(x+1) + \frac{1}{2}\delta'(x+2) \ . \tag{1}$$

Per il calcolo della sua derivata, si osservi che la variabile indipendente è x, non $-x$ come si potrebbe erroneamente considerare. Ce se ne può anche convincere ricordando che per un diffeomorfismo $y = h(x)$, si ha

$$(f(x), |J(h)|u(h(x))) = (f(h^{-1}(y)), u(y)) \ .$$

Nel caso in esame $y = h(x) = -x$, per cui

$$(f(x), u(-x)) = (f(-y), u(y)) \ .$$

È quindi chiaro che considerare la derivata della distribuzione temperata definita da $(f(x), u(-x))$, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, vuol dire derivare la distribuzione temperata $f \circ h^{-1}$. In questo contesto si osservi che essendo x e y variabili "mute", cioè d'integrazione, possiamo riscrivere $(f(-y)), u(y))$ come $(f(-x)), u(x))$. Segue quindi, come detto, che la derivazione va fatta rispetto ad x. Derivando (1) rispetto a x, si ha

$$\frac{1}{(x+i0)^2} - \delta'(x+\frac{1}{3}) - x\delta''(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta''(x) + \delta''(x+1) + \frac{1}{2}\delta''(x+2) \ .$$

Essendo

$$\frac{1}{(x \pm i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\log(x \pm i0) = P\left(\frac{1}{x^n}\right) \pm \frac{(-1)^n}{(n-1)!} i\pi\delta^{(n-1)}(x) \ ,$$

segue che la precedente distribuzione temperata è equivalente a

$$(P\left(\frac{1}{x^2}\right) + i\pi\delta'(x) - \delta'(x+\frac{1}{3}) - x\delta''(x+\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}\delta''(x) + \delta''(x+1) + \frac{1}{2}\delta''(x+2), u(x))$$

$$= (P\left(\frac{1}{x^2}\right), u(x)) - i\pi u'(0) - u'(-\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}u''(-\frac{1}{3}) + \frac{1}{2}u''(0) + u''(-1) + \frac{1}{2}u''(-2) \ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 29.05.2014

1. Sia $z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Determinare la funzione analitica f sapendo che
$$\Re f(z) = \cosh \frac{y}{x^2+y^2} \cos \frac{x}{x^2+y^2} \ , \qquad f\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0 \ .$$

2. Determinare tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = z e^{\frac{1}{\sin \frac{1}{z}}} + \frac{1}{\cos z} \ .$$

3. **Facoltativo**. Determinare tutte le singolarità della funzione
$$f(z) = \frac{1}{e^{\frac{i}{z}} - \alpha e^{-\frac{i}{z}}} \ , \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \ .$$

4. Calcolare gli integrali
$$\int_{\mathbb{R}} \frac{(x+1)\sin(\pi x)}{x^4 - 1} dx \ ,$$
$$\oint_{|z|=n} \frac{\cosh z}{z^2} dz \ , \qquad n \in \mathbb{N}_+ \ .$$

5. Indicare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$
$$(x\theta(-x) - x\theta(x) + 4(x-2)^2 \delta(\alpha - 2x + x^2), u(x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli la derivata per $\alpha = 3/4$.

6. Si determini per quali valori di $\alpha \in \mathbb{C}$
$$F(u) = \int_1^\infty (e^{-\alpha^2 x^2} + e^{i\alpha x}) u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$
è una distribuzione temperata e se ne calcoli, per tali α, la derivata.

7. **Facoltativo**. Mostrare che, nel caso $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ abbia serie di Maclaurin convergente a se stessa per $x = 1$, vale la relazione
$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=2}^{N} \Big[\frac{1}{(x+i0)^n} - P\Big(\frac{1}{x^{n-1}}\Big) \Big] + P\Big(\frac{1}{x}\Big) - P\Big(\frac{1}{x^N}\Big), u(x) \Big) = i\pi(u(0) - u(1)) \ .$$

1.

$$\cosh\frac{y}{x^2+y^2}\cos\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{1}{4}\left(e^{\frac{y}{|z|^2}}+e^{-\frac{y}{|z|^2}}\right)\left(e^{\frac{ix}{|z|^2}}+e^{-\frac{ix}{|z|^2}}\right)=$$
$$\frac{1}{4}\left(e^{\frac{i\bar{z}}{|z|^2}}+e^{-\frac{i\bar{z}}{|z|^2}}+e^{-\frac{iz}{|z|^2}}+e^{\frac{iz}{|z|^2}}\right)=\frac{1}{2}\Re\left(e^{\frac{i}{z}}+e^{-\frac{i}{z}}\right)\ ,$$

quindi $f(z)=\cos\frac{1}{z}$.

2. $ze^{\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}}$ ha singolarità essenziali isolate per $z=(k\pi)^{-1}$, $k\in\mathbb{Z}$, con $z=0$ punto d'accumulazione di singolarità essenziali isolate e quindi singolarità essenziale non isolata. Si noti che $z=(k\pi)^{-1}$, $k\in\mathbb{Z}$ include $z=\infty$ che quindi è singolarità essenziale isolata. Si osservi che lo zero dovuto al fattore z in $ze^{\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}}$ non cambia la natura della singolarità $z=0$: lo sviluppo in serie di Laurent rimane non definito per $z=0$ (non esistono contorni racchiudenti 0 che non contengano singolarità di $f(z)$).

   Per quanto riguarda la funzione $\frac{1}{\cos z}$, questa ha singolarità essenziali isolate per $z=(k+1/2)\pi$, $z\in\mathbb{Z}$, con il punto $z=\infty$ singolarità essenziale non isolata. La funzione $f(z)$ avrà le singolarità delle due funzioni, con l'ovvia avvertenza che il punto $z=\infty$ è singolarità essenziale non isolata.

3. Poiché il denominatore di $f(z)$, $e^{\frac{i}{z}}-\alpha e^{-\frac{i}{z}}$, è nullo quando $e^{\frac{2i}{z}}=\alpha$, si ha

$$z_k=\frac{2i}{\log|\alpha|+i\underline{\arg\alpha}+2\pi ik}=2\frac{\underline{\arg\alpha}+2\pi k+i\log|\alpha|}{\log^2|\alpha|+(\underline{\arg\alpha}+2\pi k)^2}\ ,\qquad k\in\mathbb{Z}\ ,$$

   sono poli semplici, mentre $z=0$, essendo punto d'accumulazione di poli, è singolarità essenziale non isolata.

4. L'integrale si calcola utilizzando i teoremi di Cauchy e dei residui ed il lemma di Jordan. Il teorema di Cauchy permette di deformare il cammino scavalcando la singolarità apparente $x=1$ (nella soluzione che segue scegliamo di passargli sopra). Successivamente applichiamo il lemma di Jordan e poi il teorema dei residui. Si ha

$$\frac{1}{2i}\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{i\pi x}-e^{-i\pi x}}{(x-1)(x^2+1)}dx=$$
$$\pi\frac{e^{i\pi z}}{(z-1)(z+i)}|_{z=i}+\pi\frac{e^{-i\pi z}}{(z-1)(z-i)}|_{z=-i}+\pi\frac{e^{-i\pi z}}{z^2+1}|_{z=1}=-\frac{\pi}{2}\left(e^{-\pi}+1\right)\ .$$

   Si sarebbe potuto anche calcolare solo l'integrale di $x\sin(\pi x)/(x^4-1)$ in quanto $\sin(\pi x)/(x^4-1)$ è funzione dispari e non contribuisce.

   Il secondo integrale è nullo in quanto la singolarità è in zero e l'espansione di Laurent intorno a $z=0$ contiene solo potenze pari.

5. Per $\alpha=1$ l'argomento della delta ha uno zero doppio, quindi $\alpha\neq1$. Va inoltre osservato che sebbene $\delta(f(x))$ possa essere considerata identicamente nulla quando $f(x)$ non ha zeri nei reali, la definizione della δ è relativa ai reali. Per questo, pur considerando valida la risposta $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$, è formalmente più corretto considerare i valori di α tali per cui il discriminante associato a $x^2-2x+\alpha$ sia positivo, cioè $\alpha<1$. Quando $\alpha=3/4$

$$4(x-2)^2\delta(x^2-2x+3/4)=9\delta(x-1/2)+\delta(x-3/2)\ .$$

Utilizzando $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$, la derivata richiesta è

$$(1 - 2\theta(x), u(x)) - 9u'(1/2) - u'(3/2) \ .$$

6. Si ha

$$F(u) = \big((e^{-\alpha^2 x^2} + e^{i\alpha x})\theta(x-1), u(x)\big) \ ,$$

che è distribuzione temperata se sono simultaneamente soddisfatte le condizioni $|\Re\alpha^2| \geq 0$, cioè $|\Re\alpha| \geq |\Im\alpha|$, e $\Im\alpha \geq 0$. Quest'ultima è equivalente a $|\Re\alpha| \geq \Im\alpha \geq 0$. La derivata richiesta è

$$\big(\big(-2\alpha^2 x e^{-\alpha^2 x^2} + i\alpha e^{i\alpha x}\big)\theta(x-1), u(x)\big) + \big(e^{-\alpha^2} + e^{i\alpha}\big)u(1) \ .$$

7. Utilizzando la relazione

$$\frac{1}{(x \pm i0)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\log(x \pm i0) = P\left(\frac{1}{x^n}\right) \pm \frac{(-1)^n}{(n-1)!} i\pi\delta^{(n-1)}(x) \ ,$$

segue

$$\sum_{n=2}^{N}\left[\frac{1}{(x+i0)^n} - P\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)\right] + P\left(\frac{1}{x}\right) - P\left(\frac{1}{x^N}\right) = i\pi\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x) \ .$$

Il limite richiesto è quindi equivalente a

$$\left(i\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\delta^{(n-1)}(x), u(x)\right) = -i\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}u^{(n-1)}(0) \ ,$$

che, a meno del primo termine mancante, corrisponde allo sviluppo in serie di Maclaurin di $-i\pi u(x)$ calcolato per $x = 1$

$$-i\pi\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}u^{(n-1)}(0) = i\pi(u(0) - u(1)) \ .$$

Errori studenti. Molti studenti non hanno prestato la dovuta attenzione nel determinare la condizione su α al punto 6, riportando tutt'altro rispetto a $|\Re\alpha| \geq \Im\alpha \geq 0$. È quindi necessario sapere che esercizi (banali) di questo tipo richiedono comunque una buona dose d'attenzione.

Un altro errore riguarda il primo integrale del punto 4. Il cammino d'integrazione è stato chiuso direttamente alla Jordan in uno dei due semipiani complessi, senza prima decomporre l'integrando utilizzando la formula di Eulero per il seno. L'errore sta nel fatto che $\sin(\pi z)$ diverge all'infinito. Presumibilmente tale svista segue dall'aver stimato il comportamento asintotico di $\sin(\pi z)$ solo su $\mathbb{R}$ (dove $\sin(\pi x)$ è limitata), dimenticandosi che $\sin(\pi z)$ non è limitata su tutto $\mathbb{C}$. In proposito va anche detto che, in un caso, oltre a tale errore, è stato modificato il cammino d'integrazione. D'altronde, questo serve per evitare i poli che compaiono nei successivi integrali quando si considera la decomposizione della funzione seno in esponenziali. È chiaro che se tale decomposizione non viene effettuata, la deformazione del cammino d'integrazione non ha alcuna utilità.

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 16.06.2014

1. Sia $z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Determinare la funzione analitica f sapendo che
$$\Re f(z) = e^x \cos \frac{y+1}{x^2 + (y+1)^2} \ .$$

2. Dopo avere determinato lo sviluppo in serie di Laurent intorno all'infinito della funzione
$$f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}} \ ,$$
si calcolino tutti i suoi residui e si descrivano le sue singolarità.

3. Calcolare l'integrale
$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{z^3} + \sin^2 z}{z^2} dz \ .$$

4. Calcolare l'integrale
$$\oint_{|z|=1} e^{z+z^{-1}} dz \ .$$

5. Calcolare la derivata della distribuzione temperata
$$(x\theta(-3x) + \frac{x^3}{2}\delta(1-x^2), u(-x)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

6. Verificare la relazione
$$(x \sum_{j=1}^{3} \Big[\frac{1}{(x+i0)^{j+1}} - \frac{1}{(x-i0)^j} \Big] - xP\Big(\frac{1}{x^4}\Big), u(x) - u(-x)) = -4\pi i u'(0) \ ,$$
$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

1.
$$e^x \cos\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2} = \frac{e^x}{2}\Big(e^{i\frac{y+1}{|z+i|^2}} + e^{-i\frac{y+1}{|z+i|^2}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(e^{\frac{z+i}{|z+i|^2}} + e^{\frac{\bar{z}-i}{|z+i|^2}}\Big) =$$
$$\frac{1}{2}\Big(e^{\frac{1}{z+i}} + e^{\frac{1}{\bar{z}-i}}\Big) = \Re e^{\frac{1}{z+i}} \ ,$$
quindi $f(z) = e^{\frac{1}{z+i}} + ic$, $c \in \mathbb{R}$.

2. Ponendo $w = 1/z$, lo sviluppo richiesto è
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{w^k}{|k|!} \ .$$
La funzione e^z non ha alcun residuo, mentre $e^{\frac{1}{z}}$ ha residuo 1 in 0 e quindi -1 all'infinito. I punti $z = 0$ e $z = \infty$ sono singolarità essenziali isolate.

3. L'integrale è nullo: né il primo né il secondo termine contengono z^{-1} nell'espansione in serie di Laurent intorno a 0. Infatti si ha
$$\frac{e^{z^3}}{z^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{3k-2}}{k!} \ ,$$
mentre il termine rimanente è funzione pari di z.

4. Si ha il seguente sviluppo in serie di Laurent intorno a 0
$$e^{z+z^{-1}} = \sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{z^{j-k}}{j!k!} \ .$$
Il coefficiente del termine z^{-1} è
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+1)!} \ ,$$
per cui
$$\oint_{|z|=1} e^{z+z^{-1}} dz = 2\pi i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!(j+1)!} \ .$$

5. Poiché $(f(x), u(-x)) = (f(-x), u(x))$ (si veda il commento riportato dopo le soluzioni), la distribuzione è equivalente a
$$(-x\theta(3x) - \frac{x^3}{2}\delta(1-x^2), u(-x)) = (-x\theta(x) + \frac{1}{4}\delta(x+1) - \frac{1}{4}\delta(1-x), u(x)) \ ,$$
$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. La derivata richiesta è quindi
$$-(\theta(x), u(x)) + \frac{1}{4}u'(1) - \frac{1}{4}u'(-1) \ .$$

6. La relazione

$$\frac{1}{(x\pm i0)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{d^n}{dx^n}\log(x\pm i0)=P\left(\frac{1}{x^n}\right)\pm\frac{(-1)^n}{(n-1)!}i\pi\delta^{(n-1)}(x)\ ,$$

implica

$$\sum_{j=1}^{3}\Big[\frac{1}{(x+i0)^{j+1}}-\frac{1}{(x-i0)^j}\Big]-P\Big(\frac{1}{x^4}\Big)=$$

$$-P\Big(\frac{1}{x}\Big)+i\pi\sum_{j=1}^{3}\frac{(-1)^j}{(j-1)!}\big[\delta^{(j-1)}(x)-\frac{1}{j}\delta^{(j)}(x)\big]\ .$$

Poiché $(f(x),u(-x))=(f(-x),u(x))$, il funzionale proposto è equivalente a

$$i\pi\sum_{j=1}^{3}\frac{(-1)^j}{(j-1)!}(x\big[\delta^{(j-1)}(x)-\frac{1}{j}\delta^{(j)}(x)+(-1)^{j-1}\delta^{(j-1)}(x)-\frac{1}{j}(-1)^j\delta^{(j)}(x)\big],u(x))$$

$$=-2\pi i(x\delta^{(2)}(x),u(x))=-4\pi iu'(0)\ .$$

Commento sulla relazione $(f(x),u(-x))=(f(-x),u(x))$. Alcuni studenti tendono a fare sviste in proposito. Si osservi che poiché l'integrale di funzioni dispari su intervallo simmetrico rispetto all'origine è nullo, si ha

$$\int_{-a}^{a}g(x)dx=\int_{-a}^{a}g_+(x)dx=\int_{-a}^{a}g_+(-x)dx=\int_{-a}^{a}g(-x)dx\ ,$$

dove $g_+(x):=(g(x)+g(-x))/2$ è la parte pari di $g(x)$. Alternativamente, ponendo $y=-x$,

$$\int_{-a}^{a}g(-x)dx=\int_{a}^{-a}g(y)(-1)dy=\int_{-a}^{a}g(y)dy=\int_{-a}^{a}g(x)dx\ .$$

Compito di Istituzioni di Metodi Matematici - 30.06.2014

1. Sia $z := x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Determinare la funzione analitica f sapendo che

$$\Re f(z) = e^{-y} \cos \frac{x+1}{y^2 + (x+1)^2} \ .$$

2. Dopo avere determinato lo sviluppo in serie di Laurent intorno all'infinito della funzione

$$f(z) = \frac{1}{z} e^{-z} + z e^{\frac{1}{z}} \ ,$$

si calcolino tutti i suoi residui e si descrivano le sue singolarità.

3. Calcolare l'integrale

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{\frac{1}{z^3}} + \cos z}{z^2} dz \ .$$

4. Calcolare l'integrale

$$\oint_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z} dz \ .$$

5. Calcolare la derivata della distribuzione temperata

$$(x\theta(1-2x) + x\delta(1-x^2), u(1-x) + u(x+1)) \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ .$$

6. Determinare per quali valori delle costanti complesse, α, β e γ, il funzionale

$$\int_{-1}^{1} e^{-\alpha x^2 + \beta x} u(x) dx + \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma^2 x} u(x) dx \ , \qquad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ ,$$

è una distribuzione temperata e se ne calcoli, per tali valori, la derivata.

1.
$$e^{-y}\cos\frac{x+1}{y^2+(x+1)^2}=\frac{e^{-y}}{2}\Big(e^{i\frac{x+1}{|z+1|^2}}+e^{-i\frac{x+1}{|z+1|^2}}\Big)=\frac{1}{2}\Big(e^{i\frac{z+1}{|z+1|^2}}+e^{-i\frac{\bar z+1}{|z+1|^2}}\Big)=$$
$$\frac{1}{2}\Big(e^{-\frac{i}{z+1}}+e^{\frac{i}{\bar z+1}}\Big)=\Re e^{-\frac{i}{z+1}}\ ,$$
quindi $f(z)=e^{-\frac{i}{z+1}}+ic$, $c\in\mathbb{R}$.

2. Ponendo $w=1/z$, lo sviluppo richiesto è
$$\frac{1}{z}e^{-z}+ze^{\frac{1}{z}}=\sum_{j=0}^{\infty}[(-1)^j w^{1-j}+w^{j+1}]\ ,$$
da cui segue che il residuo all'infinito è $-1-1/2=-3/2$. $z=0$ e $z=\infty$ sono singolarità essenziali isolate.

3. L'integrale è nullo: né il primo né il secondo termine contengono z^{-1} nell'espansione in serie di Laurent intorno a 0.

4. L'integrale proposto è dato da $2\pi i$ moltiplicato per la somma dei residui in 0 e 1. Il residuo in 1 è $-e$. Per il calcolo del residuo in 0, consideriamo lo sviluppo in serie di Laurent intorno a 0
$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1-z}=\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{j-k}\ .$$
Quando $k=j+1$, il monomio z^{j-k} diventa z^{-1}. Poiché il più piccolo valore di j è 0, segue che il coefficiente del termine z^{-1} nel precedente sviluppo è dato dalla sommatoria su k, che inizia da 1, di $1/k!$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}=e-1\ ,$$
da cui segue che l'integrale vale $-2\pi i$.

5. Si verifica immediatamente che poiché
$$(f(x),u(1-x))=(f(1-x),u(x))\ ,(f(x),u(x+1))=(f(x+1),u(x))\ ,$$
il termine con la δ si cancella e la distribuzione temperata proposta è equivalente a
$$((1-x)\theta(2x-1)+(x-1)\theta(3-2x),u(x))=((1-x)(\theta(x-\frac{1}{2})+\theta(x-\frac{3}{2})-1),u(x))\ ,$$
la cui derivata è
$$(1-\theta(x-\frac{1}{2})-\theta(x-\frac{3}{2}),u(x))+\frac{1}{2}(u(\frac{1}{2})-u(\frac{3}{2}))\ .$$

6. L'unica condizione è $\Re\gamma^2=0$, ovvero $|\Re\gamma|=|\Im\gamma|$. La derivata richiesta è
$$((-2\alpha x+\beta)(\theta(x+1)-\theta(x-1))-\gamma^2e^{-\gamma^2 x},u(x))+e^{-\alpha-\beta}u(-1)-e^{-\alpha+\beta}u(1)\ .$$