Spazi di Banach e di Hilbert

22 maggio 2014

1 Spazi di Banach

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$. La coppia $(V, \|\cdot\|)$ è detta spazio vettoriale normato se l'applicazione $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ soddisfa le proprietà della norma, cioè $\forall v, w \in V, \forall \alpha \in \mathbb{C}$

1. $\|v\| > 0$,
2. $\|v\| = 0$, $\qquad$ se e solo se $v = 0$,
3. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$,
4. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definizione 2. Un operatore lineare limitato tra spazi normati $(V_i, \|\cdot\|_i)$ $i = 1, 2$ è un'applicazione $T : V_1 \to V_2$ tale che $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e per ogni $v, w \in V_1$ si ha

1. $T(\alpha v + \beta w) = \alpha T v + \beta T w$,
2. $\|Tv\|_2 \leq c\|v\|_1$, $\forall v \in V_1$, per qualche $c > 0$.

Definizione 3. La norma di T è il più piccolo valore di c che soddisfa la precedente condizione. Quindi, confrontando $\frac{\|Tv\|_2}{\|v\|_1} \leq c$, $\forall v \in V_1$, con l'ovvia disuguaglianza

$$\frac{\|Tv\|_2}{\|v\|_1} \leq \sup_{\widetilde{v} \in V_1} \left\{ \frac{\|T\widetilde{v}\|_2}{\|\widetilde{v}\|_1} \right\} ,$$

si ha

$$\|T\| := \sup_{v \in V_1, \|v\|_1 = 1} \|Tv\|_2 = \sup_{v \in V_1} \left\{ \frac{\|Tv\|_2}{\|v\|_1} \right\} .$$

Definizione 4. Uno spazio normato completo rispetto alla metrica indotta dalla norma è detto spazio di Banach.

Osservazioni.

1. Uno spazio vettoriale normato è uno spazio metrico con metrica

$$d(v, w) = \|v - w\| .$$

Poiché a sua volta una metrica induce una topologia su V, segue che uno spazio vettoriale normato è uno spazio vettoriale topologico.

2. Gli spazi $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ con la norma euclidea $\|X\| = (\sum_i |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}$ sono esempi di spazi di Banach.

3. Un altro esempio di spazio di Banach è lo spazio di tutte le funzioni continue definite in un intervallo chiuso $[a, b]$, cioè $C[a, b]$

$$f : [a, b] \to K \ ,$$

con K un campo che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, con norma

$$\|f\| := \sup_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\} \ .$$

Che $\|f\|$ sia una norma segue dal fatto che le funzioni continue definite su un intervallo chiuso sono limitate. Si dimostra che tale spazio è completo sotto questa norma.

4. Il precedente esempio può essere generalizzato allo spazio $C(x)$ di tutte le funzioni continue $X \to K$, con X spazio compatto, allo spazio di tutte le funzioni continue limitate $X \to K$, con X uno spazio topologico. Un'altra estensione è data dallo spazio $B(x)$ di tutte le funzioni limitate $X \to K$, con X un insieme arbitrario. In tutti questi esempi è possibile moltiplicare le funzioni tra loro rimanendo nello stesso spazio. Questi sono esempi di algebra di Banach (con unità).

Enunciamo un teorema che, sebbene non sarà utilizzato in seguito, permette di definire rigorosamente l'integrazione alla Riemann e fornisce anche un tentativo di estensione dell'interpretazione di integrazione di Lebesgue.

Teorema 1. *Sia T un operatore lineare limitato da uno spazio vettoriale normato $(V_1, \|\cdot\|)$ ad uno spazio di Banach $(V_2, \|\cdot\|)$. Allora T può essere esteso univocamente ad un operatore limitato $\widetilde{T}$ dal completamento $\widetilde{V_1}$ di V_1 a V_2 con $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Cioè, esiste un $\widetilde{T} : \widetilde{V_1} \to V_2$ tale che se si riesce a completare V_1 si può estendere T a tale completamento senza cambiare norma.*

In proposito si ricorda che il completamento di uno spazio metrico si ottiene aggiungendo i limiti delle successioni di Cauchy che appartengono allo spazio metrico in considerazione.

Definizione 5. Un funzionale lineare su uno spazio vettoriale V è un'applicazione lineare $F : V \to K$, con K che può essere $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Una proprietà fondamentale dei funzionali lineari su uno spazio di Banach è descritta dal seguente teorema.

Teorema 2. *Un funzionale lineare su uno spazio di banach $(X, \|\cdot\|)$ è continuo se e solo se è limitato.*

Dimostrazione. Il concetto di continuità di un funzionale a $v \in X$ è un'ovvia estensione del concetto di continuità di una funzione. Infatti, un funzionale F è detto continuo a $v \in X$, se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta$ tale che $\forall v' \in X$, con $||v' - v|| \leq \delta$, si ha

$$||F(v') - F(v)|| \leq \epsilon \ .$$

Si osservi che ponendo $h = v' - v$, che è ancora un elemento di X, la condizione di continuità può anche essere espressa nella forma

$$||F(v+h) - F(v)|| \leq \epsilon \ , \qquad \forall ||h|| \leq \delta \ . \tag{1}$$

La dimostrazione del fatto che la limitatezza di F, cioè

$$||F(h)|| \leq M||h|| \ , \qquad \forall h \in X \ , \tag{2}$$

per qualche $M \in \mathbb{R}$, implichi la sua continuità è praticamente immediata. Infatti, dalla linearità di F segue che Eq.(2) è equivalente a

$$||F(v+h) - F(v)|| \leq M||h|| \ , \qquad \forall h, v \in X \ .$$

Dato ϵ scegliamo $\delta = \epsilon/M$, cosicché, per tutti gli h con $||h|| \leq \delta$, la precedente disuguaglianza implica

$$||F(v+h) - F(v)|| \leq M||h|| \leq M\delta = \epsilon \ , \qquad \forall v \in X \ ,$$

che è la condizione di continuità (1).

La dimostrazione che la continuità di F implichi la sua limitatezza è altrettanto immediata. A tal fine consideriamo la continuità di F al vettore nullo e scegliamo $\epsilon = 1$. Abbiamo quindi per ipotesi che $\exists \delta$ tale che $\forall h \in X$, con $||h|| \leq \delta$, si ha $||F(h) - F(0)|| \leq 1$, che, essendo $F(0) = 0$, è equivalente a

$$||F(h)|| \leq 1 \ , \forall h \in X \ , \ \text{con } ||h|| \leq \delta \ . \tag{3}$$

Consideriamo ora, per ogni $v \in X$, il vettore

$$h_v = \frac{\delta v}{||v||} \ .$$

Poiché $||h_v|| = \delta$, segue da (3) che

$$||F(h_v)|| = \frac{\delta}{||v||}||F(v)|| \leq 1 \ ,$$

cioè

$$||F(v)|| \leq \frac{||v||}{\delta} \ ,$$

che mostra che F è limitato.

Definizione 6. Se f è misurabile e $1 \leq p < \infty$, poniamo

$$\|f\|_p := \left(\int |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \ ,$$

e denotiamo con $L^p(\mathbb{R})$ le classi di equivalenza delle funzioni che differiscono tra loro per funzioni quasi dappertutto nulle (q.d.n.) con $\|f\|_p < +\infty$.

Teorema 3. (Disuguaglianza di Hölder). *Se p e q sono due numeri positivi tali che*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ ,$$

e se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, allora

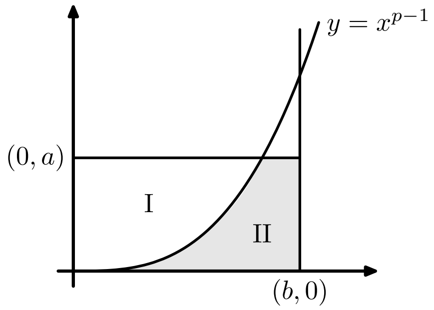
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \ , \tag{4}$$

in particolare $fg \in L^1$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che sostituendo f con $f\|f\|_p^{-1}$ e g con $g\|g\|_q^{-1}$, è sufficiente provare Eq.(4) solo nel caso $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$.
Siano a e b due numeri positivi. Proviamo che

$$ab \leq a^p p^{-1} + b^q q^{-1} \ . \tag{5}$$

A tal fine si consideri il grafico della funzione $x = F(y) \equiv y^{q-1}$. Poiché $(p-1)(q-1) = 1$, si ha $y = F^{-1}(x) = x^{p-1}$.



Si ha

$$Area(I) = \int_0^a x^{p-1} dx = \frac{a^p}{p} \ , \qquad \text{Area}(II) \leq \int_0^b y^{q-1} dy = \frac{b^q}{q} \ ,$$

e la (5) segue dall'osservazione che l'area del rettangolo in figura, cioè $ab = Area(I) + Area(II)$, è minore della somma $Area(I) + b^p q^{-1}$. Ponendo $a = |f|$ e $b = |g|$ in Eq.(5) si ha

$$|f(x)g(x)| \leq p^{-1}|f(x)|^p + q^{-1}|g(x)|^q \ .$$

Integrando

$$\int |f(x)g(x)|dx \leq p^{-1} \int |f(x)|^p dx + q^{-1} \int |g(x)|^q dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \ ,$$

cioè $\|fg\|_1 \leq 1$ che, come detto, è equivalente alla (4).

Teorema 4. (Disuguaglianza di Minkowsky). *Se $f, g \in L^p$, allora*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \ .$$

Osservazioni.

1. La disuguaglianza di Minkowsky implica che L^p è uno spazio vettoriale normato con norma $\|\cdot\|_p$. Tale spazio risulta completo rispetto a $\|\cdot\|_p$ e quindi è uno spazio di Banach.

2. Non è detto che ogni operatore lineare tra spazi normati sia limitato. Sia X lo spazio di tutti i polinomi trigonometrici definiti in $[-\pi, \pi]$, con norma $\|P\| = \int_{-\pi}^{\pi} |P(x)|dx$. Si consideri l'operatore $F : X \to X$ che agisce derivando. Questa è una mappa da un polinomio P a P'. Per $v = e^{inx}, n = 1, 2, 3\ldots$ si ha $\|v\| = 2\pi$ mentre $\|F(v)\| = 2\pi n$, che tende ad infinito per $n \to \infty$, così $F = \frac{d}{dx}$ non è limitato. L'esempio riportato fa parte di una regola generale. Ogni operatore lineare definito su di uno spazio normato finito dimensionale è limitato. Comunque, data una coppia di spazi normati, uno infinito dimensionale e l'altro non banale, è possibile trovare un operatore lineare che non sia continuo tra questi due spazi.

Che un operatore come la derivata non sia limitato lo rende difficile da studiare. È comunque possibile, definendo opportunamente dominio e range, che la derivata sia un "operatore lineare chiuso". Gli operatori lineari chiusi sono molto più generali che gli operatori lineari limitati e soddisfano importanti proprietà. Riportiamo la definizione:

Definizione 7. Siano X, Y due spazi di Banach. Un operatore lineare

$$F : \mathcal{D}(F) \subset X \to Y \ ,$$

dove $\mathcal{D}(F)$ denota il dominio di F, è detto chiuso se per ogni sequenza $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{D}(F)$, convergente ad $x \in X$ tale che

$$Fx_n \to y \in Y \ ,$$

come $n \to \infty$, si ha

$$x \in \mathcal{D}(F) \quad \text{e} \quad Fx = y \ .$$

3. La condizione di limitatezza per F, cioè che esista qualche $M > 0$ tale che $\|F(v)\| \leq M\|v\|$, $\forall v \in X$, è esattamente la condizione per F di essere Lipschitz continua a 0 e quindi ovunque per linearità.

Nota. Una funzione reale definita in $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, è detta Lipschitz continua se $\exists k \geq 0$ tale che $\forall x_1, x_2 \in D$, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$. Se $x_1 \neq x_2$, questa disuguaglianza la si può esprimere nella forma

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{|x_1 - x_2|} \leq k \ ,$$

equivalente a richiedere che le pendenze delle secanti siano limitate $\forall x_1, x_2 \in D$.

2 Spazi di Hilbert

Definizione 8. Uno spazio vettoriale complesso V è detto spazio pre-hilbertiano se esiste un'applicazione $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che per ogni $x, y, z \in V$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$ siano soddisfatte le condizioni

1. $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$,
2. $(x, \alpha y) = \alpha(x, y)$,
3. $(x, y) = \overline{(y, x)}$,
4. $(x, x) \geq 0, \ \text{con} \ (x, x) = 0 \ \text{se e solo se} \, x = 0$.

Le prime tre condizioni caratterizzano un'applicazione sesquilineare, cioè un'applicazione antilineare nella prima variabile e lineare nella seconda. L'applicazione $(\cdot,\cdot)$ è detta prodotto scalare.

Definizione 9. Siano $x, y \in V$, con V pre-hilbertiano. x e y sono detti ortogonali se $(x, y) = 0$.

Teorema 5. (Disuguaglianza di Schwarz). *Se $x, y \in V$ con V pre-hilbertiano, allora*

$$|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y) \ , \qquad \forall x, y \in V \ .$$

Dimostrazione.

$$0 \leq (x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y, x - \frac{(y,x)}{(y,y)}y) = (x,x) - (x,y)\frac{(y,x)}{(y,y)} - \frac{\overline{(y,x)}}{(y,y)}(y,x) + \frac{\overline{(y,x)}(y,x)}{(y,y)^2}(y,y)$$

$$= (x,x) - \frac{(x,y)(y,x)}{(y,y)} \ .$$

Riportiamo, senza dimostrazione, le seguenti identità che valgono negli spazi pre-hilbertiani.

Identità del parallelogramma

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \ .$$

Identità della polarizzazione

$$(x,y) = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)] = \frac{1}{4}\sum_{r=1}^{4}(-i)^r\|x+i^r y\|^2 \ .$$

Definizione 10. Uno spazio pre-hilbertiano completo nella norma indotta dal prodotto scalare è detto spazio di Hilbert.

Osservazione. Ogni spazio pre-hilbertiano è uno spazio vettoriale normato con norma $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$. Poiché uno spazio di Banach è uno spazio vettoriale normato, segue che lo spazio di Hilbert è uno spazio di Banach.

Definizione 11. Due spazi di Hilbert $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ sono detti isomorfi se esiste un'applicazione lineare biiettiva $U : \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ tale che

$$(Ux, Uy)_{\mathscr{H}_2} = (x,y)_{\mathscr{H}_1} \ , \qquad\qquad \forall x, y \in \mathscr{H}_1 \ .$$

U è detto operatore unitario.

Osservazioni.

1. I numeri p e q introdotti nella disuguaglianza di Hölder sono detti coniugati. Si osservi che se $p = 2$, allora $q = 2$, quindi se $f, g \in L^2$ (che implica $\bar{f}, \bar{g} \in L^2$), allora grazie alla disuguaglianza di Hölder, si ha $\bar{f}g \in L^1$, e

$$(f,g) := \int \overline{f(x)}g(x)dx \ ,$$

definisce un prodotto scalare. Risulta anche che L^2 è l'unico tra gli L^p con $\bar{f}g \in L^1$. In altri termini, tra gli spazi L^p, solamente L^2 è uno spazio di Hilbert.

2. l_2, lo spazio delle successioni $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}_+} z_n \in \mathbb{C}$, tali che $\sum_n |z_n|^2 < +\infty$, con prodotto scalare $(\{x_n\},\{y_n\}) := \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n y_n$, è uno spazio di Hilbert.

Teorema 6. *Sia $\mathscr{M}$ un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$. Allora $\mathscr{M}$ è completo con il prodotto scalare indotto da quello di $\mathscr{H}$ (quindi $\mathscr{M}$ è uno spazio di Hilbert).*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy di elementi di $\mathscr{M}$ convergente ad x. Allora $x \in \mathscr{H}$ perché $\mathscr{H}$ è completo. x è poi di accumulazione per $\{x_n\}$. D'altronde, un sottoinsieme di uno spazio topologico è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi punti di accumulazione. Quindi, essendo $\mathscr{M}$ chiuso, si ha $x \in \mathscr{M}$.

Teorema 7. *Sia $\mathscr{M}^\perp$ l'insieme dei vettori di $\mathscr{H}$ ortogonali a tutti i vettori di $\mathscr{M}$. Allora $\mathscr{M}^\perp$ è uno spazio di Hilbert.*

Dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in $\mathscr{M}^\perp$. Poiche $\mathscr{H}$ è completo si ha che x_n tende ad un elemento x di $\mathscr{H}$. Dobbiamo allora dimostrare che $x \in \mathscr{M}^\perp$. Si consideri la disuguaglianza

$$|(x, v)| = |(x - x_n + x_n, v)| = |(x - x_n, v) + (x_n, v)| \leq |(x - x_n, v)| + |(x_n, v)| \ ,$$

$\forall v \in \mathscr{H}$. Sia $v \in \mathscr{M}$, cosicché $(x_n, v) = 0$, $\forall n$. In questo caso $|(x, v)| \leq |(x - x_n, v)|$, e usando la disuguaglianza di Schwarz si ha

$$|(x, v)| \leq |(x - x_n, x - x_n)|^{1/2} |(v, v)|^{1/2} \ .$$

(x, v) è indipendente da n, e poiché $\lim_{n\to+\infty}(x - x_n, x - x_n) = 0$, deve essere

$$(x, v) = 0 \ ,$$

ovvero $x \in \mathscr{M}^\perp$.

Teorema 8 (Della proiezione)**.** *Sia $\mathscr{M}$ un sottospazio proprio e chiuso di uno spazio di Hilbert $\mathscr{H}$. Allora*

$$\forall x \in \mathscr{H} \exists! \{z, w\}, z \in \mathscr{M}, w \in \mathscr{M}^\perp | x = z + w \ .$$

Denotiamo con $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ l'insieme delle trasformazioni lineari limitate dallo spazio di Hilbert $\mathscr{H}$ allo spazio di Hilbert $\mathscr{H}'$. È evidente che si tratta di uno spazio vettoriale. Con la norma $\|T\| = \sup_{\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|Tx\|_{\mathscr{H}'}$, $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathscr{H}')$ è uno spazio di Banach. Consideriamo il caso $\mathscr{H}' := \mathbb{C}$.

Definizione 12. Lo spazio $\mathscr{H}^* := \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$, i cui elementi sono quindi funzionali lineari continui, è detto spazio duale di $\mathscr{H}$.

Lemma 1 (Lemma di Riesz). Per ogni $T \in \mathscr{H}^*$ esiste ed è unico il vettore $y_T \in \mathscr{H}$ tale che

$$T(x) = (y_T, x) \ ,$$

$\forall x \in \mathscr{H}$. Inoltre

$$\|T\|_{\mathscr{H}^*} = \|y_T\|_{\mathscr{H}} \ .$$

Dimostrazione. Iniziamo col mostrare che la continuità, e quindi limitatezza, di ogni $T \in \mathscr{H}^*$, implica la completezza degli spazi

$$\mathcal{N}_T := \{x \in \mathscr{H} | Tx = 0\} \ .$$

Ciò segue immediatamente dall'osservazione che se x è il limite di una data successione $\{x_n\}$ in $\mathcal{N}_T$, allora, poiché $T(x_n) = 0$, la condizione di continuità $\lim_{n\to\infty}(T(x) - T(x_n)) = 0$ implica $T(x) = 0$, quindi $x \in \mathcal{N}_T$.

Distinguiamo i due casi: $\mathcal{N}_T = \mathscr{H}$ e $\mathcal{N}_T \neq \mathscr{H}$.

Nel primo caso, cioè $\mathcal{N}_T = \mathscr{H}$, si ha $T(x) = 0 = (0, x)$, $\forall x \in \mathscr{H}$, da cui segue $y_T = 0$.

Nel caso $\mathcal{N}_T \neq \mathscr{H}$ è utile considerare lo spazio $\mathcal{N}_T^\perp$ composto da tutti i vettori di $\mathscr{H}$ ortogonali a tutti i vettori di $\mathcal{N}_T$. Sia $x_0 \in \mathcal{N}_T^\perp$ diverso dal vettore nullo. Per ogni $y \in \mathscr{H}$ e per ogni $T \in \mathscr{H}^*$ consideriamo l'identità

$$y = y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0 + \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0 \ ,$$

con $x_0 \in \mathcal{N}_T^\perp$ diverso dal vettore nullo. Essendo $\frac{T(y)}{T(x_0)}x_0$ proporzionale ad x_0, e $y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0 \in \mathcal{N}_T$, in quanto, per la linearità di T, si ha

$$T(y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0) = T(y) - \frac{T(y)}{T(x_0)}T(x_0) = 0 \ ,$$

il teorema della proiezione implica che $\mathcal{N}_T^\perp$ è al più unidimensionale. Infatti, tale teorema implica che *qualsiasi* y in $\mathscr{H}$ è esprimibile come la somma di un termine proporzionale a $x_0 \in \mathcal{N}_T^\perp$, cioè $\frac{T(y)}{T(x_0)}x_0 \in \mathcal{N}_T^\perp$, e del termine $y - \frac{T(y)}{T(x_0)}x_0 \in \mathcal{N}_T$, e che questi sono gli unici elementi soddisfacenti questa proprietà. Essendo $\mathcal{N}_T^\perp$ al più unidimensionale, se $x \in \mathcal{N}_T^\perp$, allora

$$x = \alpha x_0 \ ,$$

$\alpha \in \mathbb{C}^*$.
Si noti ora che il prodotto scalare

$$(\overline{T(x_0)}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}, x) = \frac{T(x_0)}{\|x_0\|^2}(x_0, x) \ ,$$

è nullo se $x \in \mathcal{N}_T$. Quindi, se $x \in \mathcal{N}_T$, allora

$$T(x) = 0 = (\overline{T(x_0)}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}, x) \ .$$

Nell'altro caso possibile, cioè $x = \alpha x_0$, si ha $T(x) = \alpha T(x_0)$. D'altronde, anche in questo caso, il prodotto scalare tra

$$y_T := \frac{\overline{T(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0 \ ,$$

e x riproduce il valore richiesto di $T(x)$, cioè $\alpha T(x_0)$. Infatti

$$(\overline{T(x_0)}\frac{x_0}{\|x_0\|^2}, \alpha x_0) = \alpha\frac{T(x_0)}{\|x_0\|^2}(x_0, x_0) = \alpha T(x_0) \ .$$

Abbiamo quindi mostrato che effettivamente

$$T(x) = (y_T, x) \ ,$$

$\forall x \in \mathscr{H}$.

Al fine di dimostrare l'unicità di y_T, supponiamo che esista un altro vettore $y'_T \in \mathscr{H}$ tale che $T(x) = (y'_T, x)$, $\forall x \in \mathscr{H}$. D'altronde

$$0 = T(x) - T(x) = (y_T, x) - (y'_T, x) = (y_T - y'_T, x) \ ,$$

che dovendo valere $\forall x \in \mathscr{H}$, deve valere anche per $x = y_T - y'_T$. Con tale scelta di x, l'ultima relazione implica che $\|y_T - y'_T\| = 0$, da cui $y_T = y'_T$.

Dimostriamo infine che $\|T\|_{\mathscr{H}^*} = \|y_T\|_{\mathscr{H}}$. Per definizione si ha (si ricordi che la norma in $\mathbb{C}$ è $\|z\|_{\mathbb{C}} := |z|$, $\forall z \in \mathbb{C}$)

$$\|T\|_{\mathscr{H}^*} := \sup_{x\in\mathscr{H},\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|T(x)\|_{\mathbb{C}} = \sup_{x\in\mathscr{H},\|x\|_{\mathscr{H}}=1} |(y_T, x)| \leq \sup_{x\in\mathscr{H},\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|y_T\|_{\mathscr{H}}\|x\|_{\mathscr{H}} = \|y_T\|_{\mathscr{H}} \ ,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Schwarz. D'altronde si ha anche

$$\|T\|_{\mathscr{H}^*} = \sup_{x\in\mathscr{H},\|x\|_{\mathscr{H}}=1} \|T(x)\|_{\mathbb{C}} \geq \|T\Big(\frac{y_T}{\|y_T\|_{\mathscr{H}}}\Big)\|_{\mathbb{C}} = \frac{\|T(y_T)\|_{\mathbb{C}}}{\|y_T\|_{\mathscr{H}}} = \frac{|T(y_T)|}{\|y_T\|_{\mathscr{H}}} = \frac{(y_T, y_T)}{\|y_T\|_{\mathscr{H}}} = \|y_T\|_{\mathscr{H}} \ ,$$

dove nella disuguaglianza è stato usato il fatto che il vettore $\frac{y_T}{\|y_T\|_{\mathscr{H}}}$ ha norma 1. Si ha quindi $\|y_T\|_{\mathscr{H}} \leq \|T\|_{\mathscr{H}^*} \leq \|y_T\|_{\mathscr{H}}$, da cui segue

$$\|y_T\|_{\mathscr{H}} = \|T\|_{\mathscr{H}^*} \ .$$

Mostriamo esplicitamente che il lemma di Riesz implica che $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}^*$ sono isomorfi, fatto che a sua volta implica che $\mathscr{H}^*$ è anch'esso uno spazio di Hilbert. Si osservi innanzitutto che su $\mathscr{H}^*$ possiamo definire il prodotto scalare

$$(T_1, T_2)_{\mathscr{H}^*} = (y_{T_1}, y_{T_2})_{\mathscr{H}} \ , \tag{6}$$

che riproduce consistemente la norma in $\mathscr{H}^*$

$$\|T\|_{\mathscr{H}^*} = (T, T)^{1/2}_{\mathscr{H}^*} = (y_T, y_T)^{1/2}_{\mathscr{H}} = \|y_T\|_{\mathscr{H}} \ .$$

Quindi su $\mathscr{H}^*$ è definito un prodotto scalare e la norma coincide con quella da esso indotta. Ad ogni $z \in \mathscr{H}$ associamo il funzionale T_z definito da

$$T_z(x) = (z, x)_{\mathscr{H}} \ , \qquad \forall x \in \mathscr{H} \ .$$

Da Eq.(6) segue

$$(T_z, T_w)_{\mathscr{H}^*} = (z, w)_{\mathscr{H}} \ .$$

Ciò implica che $\mathscr{H}$ e $\mathscr{H}^*$ sono isomorfi e che l'operatore unitario associato

$$U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}^* \ ,$$

è $z \mapsto T_z$.