1.2 Moto di cariche in campo elettrico

Esercizio 11

Una carica puntiforme $q = -2.0 \cdot 10^{-7}\ C$, massa $m = 2 \cdot 10^{-6}\ kg$, viene attratta da una carica $Q = 10^{-4}\ C$ distribuita uniformemente entro una sfera di raggio $R = 1\ m$ e massa molto grande. Quando la particella si trova a $d = 2\ m$ dal centro della sfera, viaggia ad una velocità pari a a $v_0 = 264.5\ m/s$ verso il centro della sfera.
Calcolare:

a. la velocità v_1 quando la particella incontra la superficie della sfera;
b. la velocità v_2 quando si trova al centro della sfera;
c. la distanza massima raggiunta dalla particella.

Esercizio 12

Una elettrone $(e,\ m_e)$ con velocità $v_0 = 6.6 \cdot 10^6\ m/s$ attraversa uno spazio di lunghezza $l = 2\ cm$, dove si trova un campo elettrico uniforme $E = 1250\ V/m$ perpendicolare a v_0.

a. Calcolare la deflessione dell'elettrone ad una distanza $L = 15\ cm$ dopo la regione con campo elettrico.
b. Supponendo che l'elettrone sia accelerato, partendo da fermo, calcolare la $d.d.p.$ V_a necessaria.
c. Calcolare il lavoro L fatto dal campo deflettente.

Esercizio 13

Un corpo puntiforme con carica q, massa m, inizialmente fermo si trova all'interno di una sfera di raggio R unformemente carica con densità ρ, ad una distanza $r < R$. Descrivere il moto.

Esercizio 14

Un sistema è formato da un anello sottile, di raggio $R = 0.2\ cm$ e un filo indefinito entrambi carichi con densità di carica uniforme. La densità lineare di carica del filo è pari a $\lambda_{filo} = 10 \cdot 10^{-6}\ C/m$, quella dell'anello è λ_{anello}. L'anello giace su un piano paralleto al filo, e la distanza del suo centro dal filo è $d = 45\ cm$. Si osserva che il campo elettrico nel punto P equidistante dal filo e dall'anello è nullo.

a. Calcolare il valore di λ_{anello};

Un protone si trova ad una distanza $L = 2.0\ m$ dal centro dell'anello, sul suo asse e dalla parte opposta rispetto al filo, con una velocità v_0 diretta verso l'anello.
Determinare:

b. v_0 affinchè il protone si fermi al centro dell'anello;

c. la forza che subisce il protone quando si trova al centro dell'anello.

Soluzione esercizio 11

a. Uso conservazione dell'energia: $\frac{1}{2}mv_0^2+U(d_0) = \frac{1}{2}mv_1^2+U(R) \ldots v_1 = 400\ m/s$

b. Attenzione: ho già scelto il riferimento del potenziale $U(R = \infty) = 0$, devo calcolare $U(0)$. Conosco il campo elettrico (usando th. Gauss), lo integro e ottengo la differenza di potenziale del centro della sfera rispetto alla superficie.
$V(0) = \frac{3}{2}V(R) \ldots v_2 = 500\ m/s$

c. Alla distanza massima, l'energia cinetica è nulla. $R_{max} = 9\ m$

Soluzione esercizio 12

a. Il moto è uniforme lungo x e accelerato lungo y dentro il condensatore. Deflessione $\Delta = 1.61\ cm$.

b. $V_a = \frac{mv_0^2}{2q} = 124\ V$.

c. Il lavoro non è nullo perché il moto non è perpendicolare alla forza elettrica, solo all'ingresso del condensatore. Si può calcolare integrando la forza o calcolando la differenza di energia potenziale. $L = \frac{q^2E^2l^2}{2mv_0^2} = 2 \cdot 10^{-19}\ J = 1.25\ eV$

1.3 Carica immagine

Esercizio 15

Una sfera conduttrice di raggio $R = 80\ cm$ è mantenuta a petenziale zero. Ad una distanza pari a $d = 1\ m$ dal centro viene posta una carica puntiforme $q = 3 \cdot 10^{-10}\ C$.
Calcolare:

a. la forza cui è soggetta la carica;
b. la densità della carica indotta sulla sfera.
c. Si ripeta l'esercizio nel caso in cui la sfera sia inizialmente scarica e isolata.
d. Oppure isolata e inizialmente carica con $q' = 6 \cdot 10^{-10}\ C$.

Esercizio 16

Ad un filo indefinito verticale con densità lineare di carica $\lambda = 1.3 \cdot 10^{-6}\ C/m$ è appesa, tramite un filo di lunghezza $l = 20\ cm$, inestensibile, privo di massa e dielettrico, una carica puntiforme $Q2 \cdot 10^{-11}\ C$, di massa $m = 11.2\ mg$.

a. Calcolare la posizione di equilibrio della carica;
b. si tratta di equilibrio stabile o instabile?

Soluzione esercizio 15

a. Uso carica immagine: carica $q_i = -\frac{R}{d}q$ a distanza $x_i = \frac{R^2}{d}$ dal centro della sfera. $F = 0.5 \cdot 10^{-9}\ N$.
b. So che sulla superficie $E = \sigma/\epsilon_0$, quindi devo calcolare il campo E sulla superficie (so già che avrà solo componente radiale). Parto dal potenziale e poi

$$E_r = -\frac{\partial V(r = R)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{R}\frac{R^2 - d^2}{(d^2 + R^2 - 2Rd\cos\theta)^{3/2}}\hat{r}$$

$\sigma = \epsilon_0 E$.
c. Stessa situazione di prima, ma sulla superficie della sfera il potenziale è costante ma $V(R) \neq 0$. Metto una seconda carica immagine Q_0 al centro della sfera. Dato che la sfera è globalmente carica, $Q_0 = -q_i$. $F = -0.435 \cdot 10^{-8}\ N$

d. Metto una ulteriore carica immagine $Q = q'$ al centro della sfera e mi riconduco al caso precedente. $F = -2.73 \cdot 10^{-9}\ N$.

Soluzione esercizio 16

a. L'equilibrio si ottiene quando $\tan\theta = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0 l \sin\theta mg}$, nell'ipotesi di angoli piccoli, si ottiene $\theta^2 = \frac{\lambda Q}{2\pi\epsilon_0 lmg}$, quindi $\theta = .146\ rad$

b.

1.4 Dipoli

Esercizio 17

Un dipolo elettrico di momento $p = 2 \cdot 10^{-11}\ Cm$ viene posto ad una distanza $d = 0.5\ m$ da un filo molto lungo, uniformemente carico con densità lineare di carica $\lambda = 10^{-8}\ C/m$.
Il dipolo è posto sul piano del filo, perpendicolare ad esso e orientato verso l'esterno.
Calcolare:

a. il lavoro necessario per trasportare il dipolo ad una distanza $d/2$ dal filo, mantenendo costante il suo allineamente. E' fatto dal campo o contro il campo?
b. il lavoro necessario per ruotare di 30° il dipolo;
c. il momento torcente del dipolo prima e dopo la rotazione.

Esercizio 18

Tre dipoli elettrici identici, di momento $\vec{p}$, $|\vec{p}| = 1 \cdot 10^{-30}\ Cm$ vengono portati dall'inifito nei punti $P_{1,2,3}$, di coordinate, rispettivamente: $P_1(0,0,0)$, $P_2(0,-a,0)$ e $P_3(0,+a,0)$ con $a = 1 \cdot 10^{-10}\ m$, e con il momento di dipolo orientato come l'asse z.
Calcolare:

a. il lavoro compiuto dalle forze del campo durante il processo;
b. il campo elettrico $\vec{E}$ nei punti dell'asse z;
c. la componente lungo z della forza cui è soggetto il dipolo nel punto P_1.

Soluzione esercizio 17

a. La forza che subisce il dipolo è
$\vec{F} = \left(p_x \frac{\partial}{\partial_x} + p_y \frac{\partial}{\partial_y} + p_z \frac{\partial}{\partial_z}\right) \vec{E}$
Per la simmetria del problema, la forza é radiale: $F_x = p\frac{dE_{filo}(x)}{dx}$
$W = \int_d^{d/2} p\frac{dE_{filo}(x)}{dx} dx = \int_d^{d/2} p dE_{filo} = \frac{p\lambda}{2\pi\epsilon_2} = 7.2 \cdot 10^{-9}\ J$
b. $W = U_i(1-\cos\theta) = \frac{-p\lambda}{\pi\epsilon_0 d}(1-\cos\theta) = -1.9 \cdot 10^{-9}\ J$
c. $M = pE\sin\theta = 7 \cdot 10^{-9}\ Nm$

Soluzione esercizio 18

a.

$$U_{ij} = -\vec{p}_i \cdot \vec{E}_{ij} = -pE_{z,ij} = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0}p^2\left(\frac{1}{d_{ij}^3}\right)$$

$$L = -\Delta U = -U_{tot} = \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{(2a)^3}\right) = -1.9 \cdot 10^{-20}\ J$$

b. $E_z^{tot} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{2}{r^3} - \frac{4z^2-2a^2}{(a^2+r^2)^{5/2}}\right]$

c. $F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-\vec{p}\cdot\vec{E}\right) = \frac{\partial}{\partial z}pE_z = p\frac{\partial}{\partial z}E_z$
$F_z(z=0) = 0$